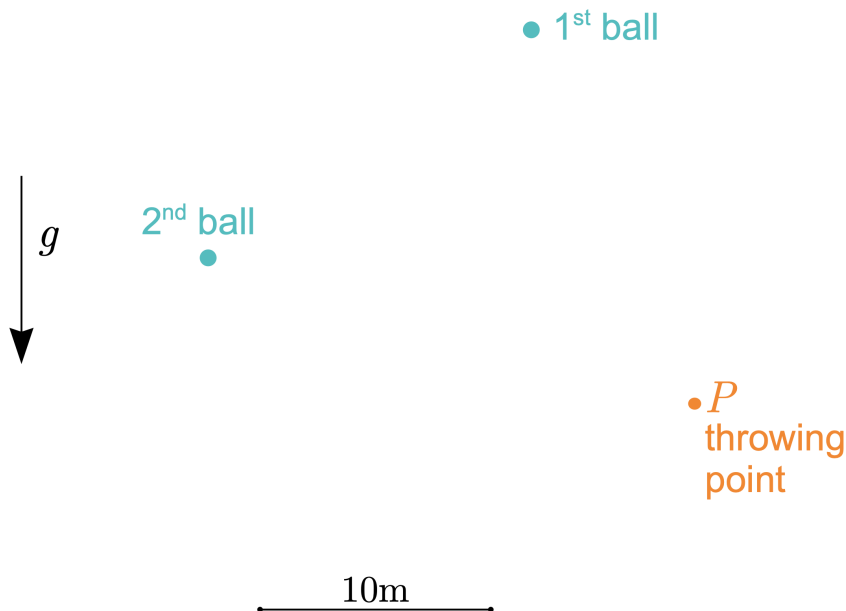


Решения задач по физике
Физико-технической контрольной "Выходи решать!"
29 апреля - 2 мая 2022 г.

Составители – А.А. Пухов, Н.В. Горшунов, Д.В. Чигрин

Восстановление траектории

На приложенном снимке изображены два шарика, которые были брошены одновременно и с одинаковой начальной скоростью, но в разных направлениях из точки Р. Какова была начальная скорость? Ответ привести в метрах за секунду и округлить до целых. Используйте $g = 9.8 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$.



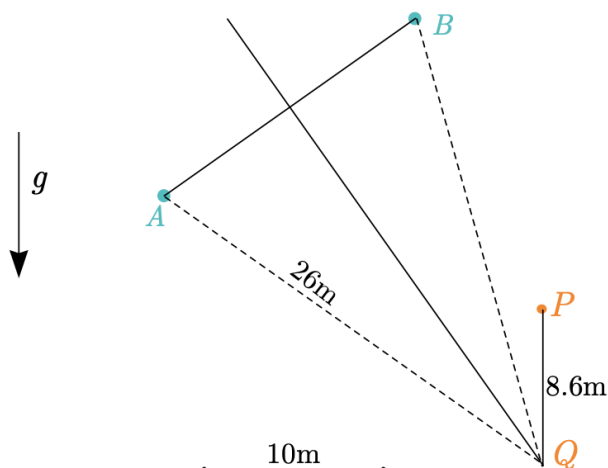
Ответ: 20

Решение задачи

Рассмотрим процесс в свободно падающей системе отсчета; оба шарика будут двигаться с постоянными скоростями. Скорости равны, но их направления различны - следовательно, в любой момент времени они находятся на одинаковом расстоянии от точки бросания Q. Таким образом, точка Q может быть найдена как точка пересечения перпендикуляра к биссектрисе отрезка AB (соединяющего шары) и вертикальной линии, проведенной из точки P.

В лабораторной системе координат точка Q, однако, является свободно падающей точкой и к моменту времени t проходит расстояние $|PQ| = \frac{gt^2}{2}$. Используя предоставленный масштаб, мы находим из рисунка, что $|PQ| \approx 8,6$ м, следовательно, $t = \frac{2|PQ|}{g} \approx 1,3$ с.

Следовательно, скорость броска $v = \frac{|AQ|}{t} \approx 20$ м/с; здесь мы использовали показания с рисунка, $|AQ| \approx 26$ м.



Тянущиеся магниты

Для изучения силы, действующей между двумя небольшими магнитами, проводится следующий эксперимент. Один из магнитов подвешивается на нить длиной $l = 1$ м. Другой магнит медленно приближается, при этом оси магнитов всегда остаются на одной горизонтальной линии. В момент, когда расстояние между магнитами станет $d_1 = 4$ см, а подвешенный магнит переместится на $x_1 = 1$ см от начального положения, равновесие будет потеряно и магниты притянутся друг к другу. Принимая, что сила притяжения между магнитами F_m зависит от расстояния d в соответствии с соотношением $F_m \propto d^{-n}$, найдите значение n .

Ответ: 4

Решение задачи

На висящий магнит действуют три силы: направленная вниз сила $m\vec{g}$, сила натяжения $\vec{T}$, которая направлена вдоль нити, и горизонтальная магнитная сила $\vec{F}_m$. Поскольку угол отклонения нити очень мал, величина $\vec{T}$ практически равна mg , поэтому ее горизонтальная проекция выражается как $-(x/l)mg$, где l это длина нити и $x = 1$ см (смещение от исходной позиции). Горизонтальная сила $F = F_m - (x/l)mg$. В точке равновесия $F = 0$. Точка равновесия устойчива, если при небольшом (виртуальном) смещении Δx возникает возвращающая сила

$$\Delta F = \Delta F_m - \frac{\Delta x}{l}mg,$$

толкаящая в сторону точки равновесия. Предположим, что $F_m = kd^{-n}$, где k - неизвестный коэффициент пропорциональности. Тогда

$$\Delta F_m = F'_m \Delta d = \frac{kn}{d^{n+1}} \Delta x,$$

так как $\Delta d = -\Delta x$. Поэтому:

$$\Delta F = \left(\frac{kn}{d^{n+1}} - \frac{mg}{l} \right) \Delta x$$

В предельном случае при потере устойчивости (что описывается в этой задаче) $\Delta F = 0$. Поэтому мы имеем два уравнения с двумя неизвестными (n и k):

$$\frac{k}{d^n} - \frac{xmg}{l} = 0$$

$$\frac{kn}{d^{n+1}} - \frac{mg}{l} = 0$$

Это может быть переписано как:

$$\frac{k}{d^n} = \frac{xmg}{l}$$

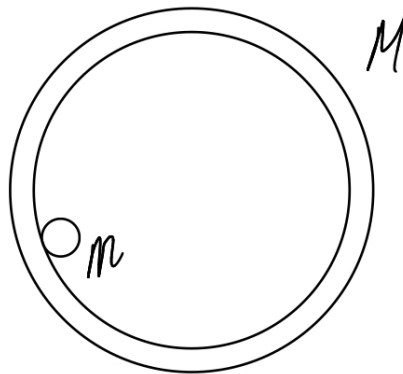
$$\frac{kn}{d^{n+1}} = \frac{mg}{l}$$

Если мы поделим соответствующие стороны двух уравнений мы получим $\frac{d}{n} = x$, поэтому

$$n = d/x = 4$$

Внутреннее давление

По "экватору" внутренней оболочки поверхности оболочки массой 2 кг движется шарик массой 1 кг, совершая полный оборот за время 1 с. Считая, что внешних сил нет, определите, с какой силой шарик давит на сферу. Расстояние между центром масс шарика и центром масс сферической поверхности равно 1 м. π принять равным 3.14. Ответ привести в Ньютонах и округлить до сотых.



Ответ: 26,29

Решение задачи

Поскольку на систему "сфера-шарик" внешние силы не действуют, центр масс этой системы должен покоиться. Это означает, что движется не только шарик, но и сфера, причем они оба вращаются вокруг оси, проходящей через центр масс системы.

Обозначим расстояние от шарика до центра масс через r , массу шарика - за m , массу сферы - за M , время - за T , расстояние между центрами масс шарика и сферы - d .

$$mr = M(d - r)$$

$$r = d \frac{m}{m + M}$$

По третьему закону Ньютона сила, с которой шарик давит на сферу, равна по модулю силе, с которой сфера действует на шарик. Она и сообщает шарiku центростремительное ускорение.

$$a_{\text{ц}} = \omega^2 r = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \frac{Md}{(M + m)}$$

Итак, искомая сила равна по модулю

$$F = ma_{\text{ц}} = \frac{4\pi^2 Mmd}{T^2(M + m)} = 26.29 \text{ Н}$$

и направлена по радиусу от центра вращения.

Газовый вопрос

По длинной трубе диаметром 2022 мм подаётся смесь горючих газов под давлением 100000 Паскаль. Скорость движения газов в трубе равна 15 м/с, температура - 23 °С, средняя молярная масса смеси - 44 г/моль. Какая масса газа перекачивается по газопроводу за 1 час? Ответ привести в килограммах, округлив до целых. π принять равным 3.14.

Ответ: 310174

Решение задачи

Зная одно из уравнений состояния газа, запишем его плотность в трубе:

$$\rho = \frac{\mu P}{RT}$$

Тогда, зная плотность смеси газов, сразу найдем массу перекачанного газа за время t :

$$m = \rho SVt = \rho \frac{\pi D^2}{4} Vt$$

$$m = \frac{\mu P}{RT} \frac{\pi D^2}{4} Vt = 310017 \text{ кг}$$

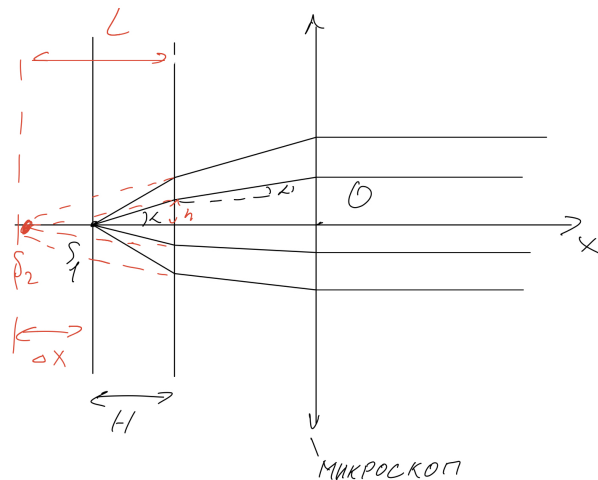
*Принимались ответы с погрешностью 2 %.

Микроскопическое преломление

На ровной поверхности под прозрачной пластинкой толщиной $H = 15$ мм расположен отрывок бумаги с текстом, который рассматривают с помощью микроскопа. На какое расстояние нужно передвинуть тубус микроскопа, чтобы настроиться на буквы текста при отсутствии пластинки? Показатель преломления материала, из которого сделана пластинка, $n = 1,3$. Ответ привести в мм и округлить до десятых.

Ответ: 3,5

Решение задачи



S_1 - главный фокус оптической системы в присутствии пластинки.

Микроскоп сфокусирован на тексте $\Leftrightarrow$ текст находится в фокальной плоскости оптической системы.

S_2 - главный фокус оптической системы при отсутствии пластинки. Таким образом, Δx - искомое смещение по оси Ox .

Используем приближение параксиальных лучей:

$$\begin{cases} n \sin(\alpha) = \sin(\alpha') \\ \sin(\alpha) \approx \alpha \\ \sin(\alpha') \approx \alpha' \end{cases}$$

$$\Rightarrow n\alpha = \alpha'$$

$$h = H \tan(\alpha) \approx H\alpha$$

$$h = L \tan(\alpha') \approx L\alpha'$$

Из трех предыдущих уравнений получаем:

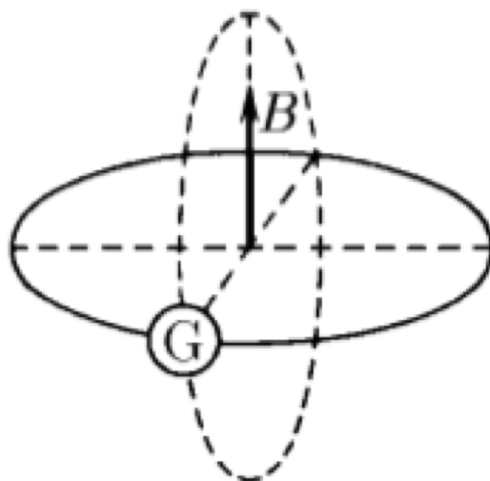
$$H\alpha = L\alpha' \Rightarrow \frac{L}{H} = 1 + \frac{\Delta x}{H} = \frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{1}{n}$$

$$\Delta x = H \left(\frac{1}{n} - 1 \right) = -3.5 \text{ мм}$$

Но нас просят найти расстояние - значит, мы берем значение смещения по модулю и получаем 3.5 мм.

Поворотный момент

Виток с площадью $S = 5 \text{ м}^2$ расположен перпендикулярно магнитному полю с индукцией $B = 1 \text{ Тл}$. Он замкнут через гальванометр с сопротивлением $R = 6 \text{ Ом}$. Какой заряд протечёт через этот гальванометр, если виток повернуть параллельно полю? Ответ привести в Кулонах и округлить до сотых.



Ответ: 0,83

Решение задачи

Начальный магнитный поток через площадь, ограниченную витком:

$$\Phi_1 = BS$$

При повороте плоскости витка на угол α нормаль, связанная с витком, поворачивается на тот же угол, поэтому магнитный поток становится равным $\Phi_2 = BS \cos(\alpha)$. Так как магнитный поток меняется, то в витке возникает ЭДС индукции. Однако, закон изменения магнитного потока по времени не задан. Нельзя утверждать и то, что поток изменялся равномерно. Поэтому для вычисления ЭДС индукции воспользуемся формулой $\varepsilon = -\Phi(t)'$. По витку протекает индукционный ток $I(t) = \frac{\varepsilon}{R} = -\frac{\Phi(t)'}{R}$.

Заряд, протекший по витку и регистрируемый гальванометром:

$$\begin{aligned} q &= \int_{t_1}^{t_2} I(t) dt \\ q &= \int_{t_1}^{t_2} -\frac{\Phi(t)'}{R} dt = -\frac{1}{R} \Phi(t) \Big|_{t_1}^{t_2} \\ q &= -\frac{\Delta \Phi}{R} \\ \Delta \Phi &= \Phi_2 - \Phi_1 = 0 - BS = -BS \\ q &= -\frac{-BS}{R} = \frac{BS}{R} = 0.83 \end{aligned}$$

Падение кольца

В магнитном поле с большой высоты падает кольцо радиусом $a = 2$ м и массой $m = 5$ кг. Сопротивление кольца $R = 10$ Ом. Плоскость кольца все время горизонтальна. Найдите установившуюся скорость падения кольца, если вертикальная составляющая индукции магнитного поля изменяется с высотой по закону $B = B_0(1 + \alpha h)$. α принять равным 0.4 м^{-1} . $B_0 = 15$ Тл. g принять равным $g = 9.8 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$. π принять равным 3.14. Ответ привести в метрах за секунду и округлить до сотых.

Ответ: 0,09

Решение задачи

Так как после установление скорости кольца его кинетическая энергия не меняется, его изменение потенциальной энергии должно быть равно тепловым потерям в кольце. Если установившаяся скорость кольца равна v , то ЭДС индукции, возбуждаемая в кольце при его движении, по модулю равна:

$$\varepsilon = \frac{\Delta\Phi}{t}$$

Где Φ - магнитный поток, пронизывающий кольцо. Так как

$$\Phi = \pi R^2 B = \pi a^2 B_0 (1 + \alpha H)$$

$$\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = \pi a^2 B_0 \frac{\Delta H \alpha}{\Delta t}$$

$$\frac{\Delta H}{\Delta t} = v$$

$$\varepsilon = \pi a^2 B_0 \alpha v$$

$$I = \frac{\pi a^2 B_0 \alpha v}{R}$$

Закон сохранения энергии:

$$mgh = I^2 R t \Rightarrow mgv = I^2 R \Rightarrow mgv = \frac{(\pi a^2 B_0 \alpha v)^2}{R}$$

$$v = \frac{mgR}{(\pi a^2 B_0 \alpha)^2} = 0.09 \text{ м/с}$$

Сжатый воздух

Пустой сосуд наполняется через вентиляное устройство путём подсоединения к нему баллонов со сжатым воздухом. После выравнивания давлений в сосуде и баллоне клапан перекрывается, после чего подсоединяется следующий баллон - и так далее. Найти отношение давлений в сосуде после подсоединения одного баллона со сжатым воздухом к давлению после присоединения двух баллонов. Известно, что объём сосуда втрое больше объёма одного баллона. Считать, что в процессе выравнивания давлений выравнивается и температура газа в сосуде и баллоне.

Ответ: 0,57

Решение задачи

Запишем уравнение Менделеева-Клапейрона для баллона со сжатым воздухом. T_0 - температура окружающей среды, P_0 - давление в баллоне, V_0 - объём баллона.

$$P_0 V_0 = \nu_1 R T_0$$

Подключение первого баллона:

$$P_1 V_1 = \nu_1 R T_0$$

$$V_1 = 3V_0 + V_0, 3V_0 = V_c$$

V_1 - объем системы из баллона и сосуда

$$P_1 = \frac{\nu_1 RT_0}{4V_0} = \frac{P_0}{4}$$

Отключение первого баллона:

$$P_1 V_c = \nu_{c1} RT_0$$

$$\nu_{c1} = \frac{P_1 V_c}{RT_0} = \frac{3P_0 V_0}{RT_0} = \frac{3}{4} \nu_0$$

- количество газа, оставшегося в сосуде после перекрывания вентиля.

Подключение второго баллона:

$$P_2 V_1 = \nu_2 RT_0$$

$$\nu_2 = \nu_{c1} + \nu_1$$

- суммарное количество газа в системе после подключения второго баллона.

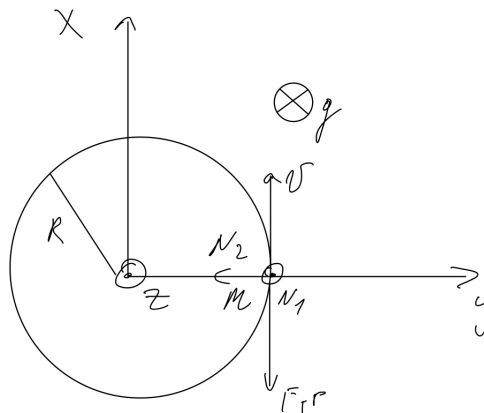
$$P_2 = \frac{\nu_2 RT_0}{V_1} = \frac{\frac{7}{4} \nu_0 RT_0}{4V_0} = \frac{7}{4} \frac{P_0}{4} \Rightarrow \frac{P_1}{P_2} = \frac{4}{7}$$

Возвращение кольца

Колечко скользит по шероховатому проволочному кольцу радиуса $R = 5$ м, расположенному в горизонтальной плоскости. Коэффициент трения скольжения равен 0.3. Найти значение начальной скорости V_0 , при котором колечко остановится той же точке, из которой начинало движение. g принять равным $g = 9.8 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$. π принять равным 3.14. Ответ привести в метрах за секунду и округлить до целых.

Ответ: 33

Решение задачи



Запишем второй закон Ньютона:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

По Ох:

$$-F_{\text{тр}} = ma_x$$

По Оу:

$$-N_1 = -m \frac{V^2}{R}$$

По Oz:

$$N_1 - mg = 0$$

$$F_{\text{тр}} = \mu m \sqrt{g^2 + \left(\frac{v^2}{R}\right)^2} \Rightarrow \dot{V} = -\mu \sqrt{g^2 + \left(\frac{V^2}{R}\right)^2}$$

$$\frac{dV^2}{\sqrt{g^2 + \left(\frac{V^2}{R}\right)^2}} = -2\mu dS,$$

где dS - пройденный путь.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{g^2 + \left(\frac{x}{R}\right)^2}} = R \ln(x + \sqrt{x^2 + g^2 R^2})|_n^k, x = V^2$$

$$R \ln\left(\frac{V^2 + \sqrt{V^4 + g^2 R^2}}{V_0^2 + \sqrt{V_0^4 + g^2 R^2}}\right) = -2\mu S$$

При $S = 2\pi R, V_0^2 = 0 \Rightarrow$

$$\ln\left(\frac{gR}{V_0^2 + \sqrt{V_0^2 + g^2 R^2}}\right) = -4\pi\mu$$

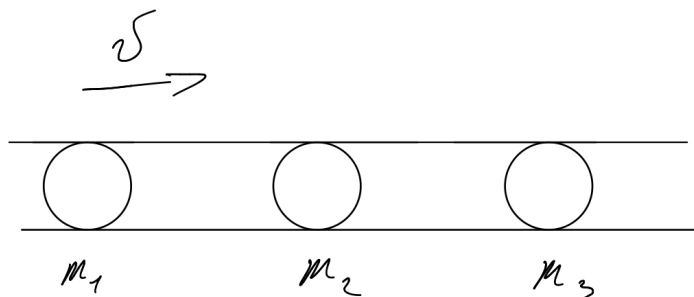
$$V_0^2 + \sqrt{V_0^4 + g^2 R^2} = gRe^{4\pi\mu}$$

$$V_0^2 = grsh(4\pi\mu) \Rightarrow V = 33 \text{ м/с}$$

Скользящие шары

В гладкой горизонтальной трубе могут скользить три шарика. Крайнему левому шарiku массой $m_1 = 1\text{кг}$ сообщили начальную скорость $V_0 = 5\text{м/с}$, направленную, как указано на рисунке. При какой массе m_2 среднего шарика скорость правого шарика массой $m_3 = 4\text{кг}$ окажется наибольшей после его первого удара? Ответ выразить в кг.

Все соударения абсолютно упругие.



Ответ: 2

Решение задачи

Запишем закон сохранения энергии и закон сохранения импульса для соударения первого и второго шариков:

$$\begin{cases} m_1 V_1 = m_2 V_2 + m_1 V_1' \\ \frac{m_1 V_1^2}{2} = \frac{m_2 V_2^2}{2} + \frac{m_1 V_1'^2}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_1 V_1 - m_1 V_1' = m_2 V_2 \\ m_1 V_1^2 - m_1 V_1'^2 = m_2 V_2^2 \end{cases}$$

$$V_1' = V_2 - V_1$$

$$m_1 V_1 = m_2 V_2 + m_1 V_2 - m_1 V_1 \Rightarrow V_2 = \frac{2m_1 V_1}{m_2 + m_1}$$

Заметим, что ситуация второго соударения в точности идентична первой, с точностью до перестановки индексов в уравнениях:

$$V_3 = \frac{2m_2 V_2}{m_2 + m_3} = \frac{2m_2}{m_2 + m_3} \left(\frac{2m_1 V_1}{m_2 + m_1} \right)$$

Функция будет иметь максимум при $m_2 = \sqrt{m_1 m_3} = 2$ кг

Огненный студент

Учебник по математическому анализу имеет удельную теплоту сгорания 10^7 Дж/кг. Студент Вася не ходил на пары и вылетел с универа - и теперь ему нечем платить за отопление. Сколько килограмм учебников нужно Васе сжигать в день при морозе в -25°C , чтобы не страдать от холода,

если теплоёмкость Васи - $3500 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{K}}$, весит он 70 кг, а остывает на 10°C в час? Ответ округлите до сотых.

Решение: Потребляемая Васей мощность $P = \frac{cm\Delta T}{t}$. Тогда в день ему нужно тепла $Q = Pt = \frac{t}{t} cm\Delta T = qM$. Отсюда $M = \frac{t}{t} \frac{cm\Delta T}{q} = 5,88 \text{ кг}$

Колебания ареометра

В равновесии ареометр представляет из себя погруженный в воду сосуд с трубкой, поднимающейся над поверхностью воды подобно перископу подводной лодки. Масса ареометра $m=200$ г, плотность воды $\rho=1000 \text{ кг/м}^3$, площадь сечения трубки $S=0,05 \text{ см}^2$. Найдите период малых колебаний ареометра в пренебрежении сопротивлением воды. Ответ округлите до десятых.

Решение: В положении равновесия для ареометра верно, что $\rho_v g V_{\text{погр}} - mg = 0$. Допустим, мы погрузим его дополнительно на глубину Δx . Тогда на него начнёт действовать дополнительная выталкивающая сила $-\rho_v g \Delta V_{\text{погр}} = -\rho_v g S \Delta x = ma \rightarrow a + \frac{\rho_v g S}{m} x = 0 -$

уравнение малых колебаний. Отсюда $\omega = \sqrt{\frac{\rho_v g S}{m}} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{\rho_v g S}} = 12,6 \text{ с}$

Вопрос вселенского масштаба

Видимую Вселенную (Метагалактику) можно считать однородным изотропным шаром с радиусом $R_0 = 10^{28} \text{ см}$ и плотностью галактик $\rho_0 \approx 5 \cdot 10^{-30} \frac{\text{г}}{\text{см}^3}$. Начальное распределение скоростей радиального разбегания галактик $v = H_0 r$, где $H_0 \approx 3 \cdot 10^{-18} \text{ с}^{-1}$ — постоянная Хаббла в нашу эпоху. В ньютоновском приближении оцените критическую начальную плотность Вселенной ρ_k , при которой кинетический разлет галактик сменится их гравитационным сжатием. Ответ выразите в $10^{-30} \frac{\text{г}}{\text{см}^3}$, округлив до целого.

Решение: Запишем уравнение энергетического баланса: $T = \int_0^R \frac{1}{2} * 4\pi r^2 dr * H^2 r^2 =$

$\frac{3}{10} M H^2 R^2. U = -G \int_0^R \frac{4\pi r^2 dr * \frac{4}{3} \pi r^3}{r} = -\frac{4}{5} G M \pi \rho R^2$, где $M = \frac{4}{3} \pi \rho R^3$. Критический случай: $T + U = 0 \rightarrow \frac{4}{5} G M \pi R^2 \left(\frac{3H^2}{8\pi G} - \rho_k \right) \rightarrow \rho_k = \frac{3H^2}{8\pi G} = 16 \cdot 10^{-30} \frac{\text{г}}{\text{см}^3}$

Конец света

Демографические данные показывают, что последние лет сто-двести численность населения Земли $N(t)$ растёт не по закону Мальтуса $\dot{N} \sim N$, а по закону бимолекулярной реакции $\dot{N} \sim N^2$ с постоянной Фёрстера $C \approx 200$ млрд чел. лет. Предскажите, в каком году наступит конец света, учитывая, что население Земли в 2000 г. составляло ≈ 6 млрд чел. Округлите до целого.

Решение: Согласно условию, $\dot{N} = \frac{N^2}{c} = \frac{dN}{dt} \rightarrow \frac{cdN}{N^2} = dt \Rightarrow -\frac{c}{N} = t + A_0$, где $A_0 = -\frac{c}{N_0} - t_0 \approx -2033$. Конец света наступит при условии $\frac{c}{N} = 0 \leftrightarrow t_k + A_0 = 0 \Rightarrow t_k = 2033$ г.

Маятник Фуко

На какой угол $\Delta\varphi$ повернется плоскость качаний математического маятника за сутки на широте Москвы (56°) из-за действия силы Кориолиса? Ответ выразите в градусах и округлите до целого.

Указание: Сила Кориолиса $\vec{F}_{\text{кор}} = -2m[\vec{\Omega} \times \vec{v}]$ – сила, действующая на частицу во вращающейся системе отсчёта, где $\vec{\Omega}$ – угловая скорость системы, $\vec{v}$ – скорость относительно системы

Решение: На широте Москвы маятник приобретает проекцию ускорения на плоскость, в которой лежит груз маятника, равную по модулю $a_{\text{кор}} = 2\Omega v \cos(90 - \alpha) = 2\Omega v \sin \alpha$, где α – это широта. Мы знаем, что при гармонических колебаниях $v = x_m \omega \sin(\omega t) \rightarrow a_{\text{кор}} = 2\Omega x_m \omega \sin(\omega t) \sin \alpha$. Причём это ускорение всегда перпендикулярно скорости – т.е. оно поворачивает плоскость. Рассмотрим движение в течение половины периода колебаний, когда скорость не меняет направления. Для приобретаемой от силы Кориолиса скорости имеем: $v_{\text{кор}} = \int a_{\text{кор}} dt = 2\Omega x_m \sin \alpha - 2\Omega x_m \sin \alpha \cos(\omega t)$ (т.к. $v_{\text{кор}}(0) = 0$) $\Rightarrow x_{\text{кор}} = \int v_{\text{кор}} dt = 2\Omega x_m \sin \alpha t - \frac{2\Omega x_m \sin \alpha}{\omega} \sin(\omega t)$. Тогда через полпериода имеем, что смещение x равняется $\Omega x_m \sin \alpha T$. Отсюда угол, на который поворачивается маятник за полпериода $\Delta\gamma \approx \frac{x_{\text{кор}}}{2x_m} = \frac{1}{2} \Omega T \sin \alpha$. Всего в сутках уместится $N = \frac{\tau}{\frac{1}{2}T} = \frac{2\tau}{T}$ полупериодов. Тогда общий поворот за день $\Delta\varphi = \frac{2\tau}{T} \frac{1}{2} \Omega T \sin \alpha = \Omega t \sin \alpha = \frac{2\pi}{\tau} t \sin \alpha = 2\pi \sin \alpha \approx 298^\circ$

Занимательный эксперимент

В шахту, прорытую по диаметру Земли ($R = 6400$ км, $g = 10 \frac{m}{c^2}$), кинули студента ФПФЭ. Определите, через какое время он достигнет центра. Соппротивлением воздуха пренебречь. Ответ выразите в минутах, округлив до целого.

Решение: На студента в силу теоремы Гаусса всегда будет действовать сила тяжести только со стороны той области земли, которая находится ближе к центру, чем студент в текущий момент времени. Т.е. уравнение падения студента имеет вид $m\ddot{x} = -G \frac{mM(x)}{x^2} = -G \frac{mM_3}{x^2} \frac{x^3}{R^3}$, где x – координата, отсчитываемая от центра земли. Т.е. $\ddot{x} + \frac{GM_3}{R^3} x = 0$ – уравнение колебательного движения с частотой $\omega = \sqrt{\frac{GM_3}{R^3}}$. Тогда центра студент достигнет за $\frac{T}{4} = \frac{\pi}{2\omega} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{R^3}{GM_3}} \approx 21$ мин

Колебания планетарного масштаба

Колебания земной атмосферы под влиянием Луны, которая вращается вокруг Земли, представляют собой приливы и отливы. Отклик атмосферы на Луну – это обычный отклик осциллятора на периодическую силу. Период этого воздействия составляет $T = 12$ ч 40 мин, приливы происходят дважды в сутки. Время задержки прилива по отношению к прохождению Луны составляет $\Delta T = 0$ ч 55 мин. Период собственных затухающих колебаний атмосферы, измеренный при глобальных извержениях гигантских вулканов, составляет $T_1 = 10$ ч 20 мин. Оцените добротность осциллятора «Земля-атмосфера». Ответ округлите до целого.

Указание: добротность осциллятора – отношение запасённой в системе энергии к энергии, теряемой за один радиан колебаний. Её также можно вычислить по формуле $Q = \frac{\omega_1}{2\gamma}$, где $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ – резонансная частота с учётом затухания, γ – коэффициент затухания, ω_0 – собственная резонансная частота.

Решение: ω_1 мы найти можем легко – оно соответствует как раз собственным затухающим колебаниям. А вот с коэффициентом затухания нужно разобраться. Мы знаем, что при воздействии с периодом T задержка прилива составляет ΔT . Зная, что решение для уравнения вынужденных колебаний затухающего осциллятора $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \Omega t$ выглядит как $x(t) = B \cos(\Omega t - \psi)$, где $\tan \psi = \frac{2\gamma\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2} = \frac{2\gamma\Omega}{\omega_1^2 + \gamma^2 - \Omega^2}$, а ψ – та самая задержка по фазе.

Из квадратного уравнения тогда имеем $\gamma = \frac{2\Omega \pm 2\Omega \sqrt{1 + \frac{\tan^2 \psi (\Omega^2 - \omega_1^2)}{\Omega^2}}}{2 \tan \psi} \approx \frac{2\Omega \pm 2\Omega \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\tan^2 \psi (\Omega^2 - \omega_1^2)}{\Omega^2}\right)}{2 \tan \psi}$.

В предположении большой добротности тогда получаем $\gamma = \frac{\tan \psi (\omega_1^2 - \Omega^2)}{2\Omega}$, где $\Omega = \frac{2\pi}{T}$, $\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1}$,

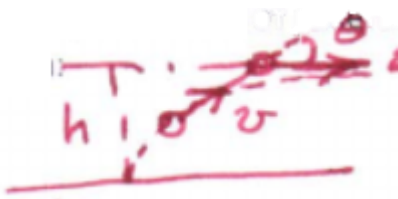
$\psi = \Omega \Delta T$. Тогда $Q = \frac{\omega_1}{2\gamma} = \frac{\frac{2\pi}{T_1}}{\frac{\tan \frac{2\pi \Delta T}{T} \left(\left(\frac{2\pi}{T_1} \right)^2 - \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 \right)}{2 \cdot \frac{2\pi}{T}}} = \frac{T_1 T}{(T^2 - T_1^2) \tan \frac{2\pi \Delta T}{T}} \approx 5$

Интересная траектория

Истребитель летит горизонтально со скоростью $u = 400$ км/ч на высоте 2 км над поверхностью земли. Когда он пролетает над пусковой установкой, в его направлении перпендикулярно земле стартует ракета «земля–воздух». Она летит со скоростью v так, чтобы её скорость все время была направлена на истребитель. За какое время ракета догонит истребитель, если $v/u = 1,1$? Ответ выразите в секундах, округлив до целого.

Решение: Разберёмся, каким уравнениям соответствует движение ракеты. Во-первых, это уравнение движения по Ox : $\int_0^\tau v \cos \theta dt = ut$. Но также мы можем записать уравнение для полёта от ракеты до истребителя, зная, что в начале расстояние было равно h : $\int_0^\tau (v - u \cos \theta) dt = h$.

Выражая $\cos \theta dt$ из второго уравнения и подставляя в первое, получим, что $\tau = \frac{vh}{v^2 - u^2} \approx 94$ с



Ответ: 94 секунды.

Дефект веса

На одной стороне чашечных весов лежит лёд весом 1 кг. На другой – гири, его уравнивающие. Затем лёд тает, при этом вода не выливается, не испаряется – всё остаётся внутри чаши. Гирю какой массы необходимо доложить на вторую сторону, чтобы вернуть равновесие? Ответ выразите в граммах и округлите до сотых.

Решение: Когда на чаше весов лежит лёд, на него действует не только сила тяжести, но также ещё и сила Архимеда со стороны воздуха, которая выталкивает его вверх. При этом баланс сил имеет вид $N + \rho_{\text{возд}} g V_{\text{л}} - mg = 0$, где N – тот самый уравнивающий вес. Вся идея задачи состоит в

том, что при плавлении лёд меняет объём, а значит – и уменьшается действие силы Архимеда.

$$\text{Тогда } N' + \rho_{\text{возд}} g V_{\text{в}} - mg = 0 \Rightarrow N' - N = \rho_{\text{возд}} g V_{\text{л}} - \rho_{\text{возд}} g V_{\text{в}} = \Delta m g$$

$$\Rightarrow \Delta m = \rho_{\text{возд}} V_{\text{л}} - \rho_{\text{возд}} V_{\text{в}} = \rho_{\text{возд}} m \left(\frac{1}{\rho_{\text{л}}} - \frac{1}{\rho_{\text{в}}} \right) = 0,14 \text{ г.}$$

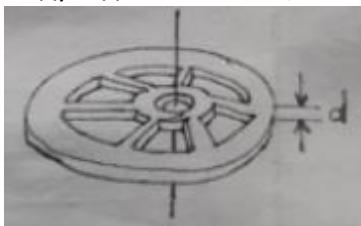
Ответы «0,11 и 0,12 грамм» с использованием более точных значений плотностей также засчитывались

Спешащие часы

Раби очень гордился точностью хода своих механических часов. Однажды, поднявшись на гору высотой 2500 м при температуре 20 °С для эксперимента с космическими лучами, он обнаружил, что его часы стали несколько спешить. Раби предложил эту задачу Ферми, который тотчас дал объяснение этому эффекту и оценил порядок погрешности хода часов. Оцените и вы, считая, что все элементы механизма часов сделаны из меди. В ответе укажите величину ошибки в секундах, накопившуюся за сутки.

Решение: Такое явление могут вызвать сразу несколько причин – и наше дело оценить возможный вклад каждой из них и выявить наибольшую:

1. Во-первых, такое мог бы в теории вызвать температурный эффект (температурное сжатие). Но в данной задаче нам дана температура в горах – и она практически не отличается от комнатной температуры и температуры на земле, поэтому данный эффект оценивать не будем (иначе часы у всех бы начинали спешить просто при переходе из квартиры на улицу, чего мы не наблюдаем)
2. Элементы часов испытывают вязкое трение о воздух. Поскольку $F = \eta S \frac{dv}{dr}$, а градиент скорости $\nabla v \sim \frac{v}{R} = \dot{\phi}$, то дополнительно действующий момент со стороны силы трения равен $M \sim \eta R^3 \dot{\phi}$. Т.е. $I\ddot{\phi} + \eta R^3 \dot{\phi} + k\phi = 0$.
 $I \sim mR^2 \rightarrow \ddot{\phi} + \frac{\eta R}{m} \dot{\phi} + \omega_0^2 \phi = 0$. $\omega^2 = \omega_0^2 - \frac{1}{4} \left(\frac{\eta R}{m} \right)^2$. $\frac{\delta \omega}{\omega} \sim \frac{1}{4} \left(\frac{\eta R}{m} \right)^2 \frac{\delta \eta}{\eta}$. При этом $\eta \approx 1,82 \cdot 10^{-5} \text{ мПа} \cdot \text{с}$. Полагая даже $\delta \eta \sim \eta$, $R = 1 \text{ см}$, $m = 1 \text{ г}$, получим $\frac{\delta \omega}{\omega} \sim 10^{-8}$, что соответствует погрешности в $10^{-3} \frac{\text{сек}}{\text{сутки}}$
3. Основной вклад в сопротивление при движении элементов несёт присоединённая масса воздуха для элементов, имеющих прорези – вроде маховичка.



На горе воздух разрежен -> присоединённая масса меньше и часы спешат, поскольку

$$\text{присоединённая масса} \sim \rho_{\text{возд}} V_{\text{мах}}. \text{ Тогда } \frac{\delta \omega}{\omega} \sim \frac{\delta I}{I} \sim \left(\frac{\rho_{\text{возд}} R^2 d}{M} \right) \frac{\delta \rho_{\text{возд}}}{\rho_{\text{возд}}} \sim \left(\frac{\rho_{\text{возд}}}{\rho_{\text{меди}}} \right) \frac{\delta \rho_{\text{возд}}}{\rho_{\text{возд}}}$$

распределением Больцмана для плотности воздуха, либо просто изучая табличные

величины, видим, что $\rho_{\text{возд } 0} \approx 1,225 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$, $\rho_{\text{возд } 2500} \approx 0,957 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$, $\rho_{\text{меди}} \approx 8960 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$. Тогда

величина ошибки $\frac{\delta \omega}{\omega} \sim 10^{-4}$, что соответствует погрешности $\sim 9 \frac{\text{сек}}{\text{сутки}}$. В силу сложности

задачи, принимались ответы от 1 до 40 секунд (десятичный логарифм в диапазоне от 0 до 1,61).

Бегущий Иисус

Оцените, с какой минимальной скоростью человек массой 70 кг и площадью стопы 180 см² должен бежать по воде, чтобы не тонуть? Осуществите качественную оценку. В ответе укажите десятичный логарифм от скорости, выраженной в километрах в час.

Решение: Сделаем допущение, что нога человека выступает веслом, которым он «гребёт» воду. Тогда силу, с которой стопа действует на воду, можно оценить как силу сопротивления в жидкости $F = \frac{c_x \rho S v^2}{2} = mg \rightarrow v = \sqrt{\frac{2mg}{\rho S}} \approx 31 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$. Здесь мы приняли $c_x \approx 1$. Оценка достаточно грубая, т.к. это норма ГТО на 100 м. Можно также учесть то, что в каждый момент времени профессиональный бегун приземляется только на носочек ступни – её площадь в ~2 раза меньше. Тогда получим значение скорости порядка 45 км/ч. Можно провести и дополнительные коррекции. В силу сложности, засчитывались ответы в диапазоне от 20 до 90 км/ч (десятичный логарифм в диапазоне от 1,2877 до 1,956)

Немалые колебания

Найдите относительное изменение периода математического маятника $\frac{\Delta T}{T}$ в начальный момент времени при его колебаниях с начальной амплитудой $\varphi = 30^\circ$ по отношению к периоду малых колебаний. Ответ выразите в процентах, округлив до десятых.

Решение: Уравнение колебаний математического маятника: $mgl(1 - \cos\varphi) + \frac{mv^2}{2} = C$.

$$\begin{aligned} T &= 4\sqrt{l} \int_0^{\varphi_m} \frac{d\varphi}{\sqrt{2(E - U(\varphi))}} = 4\sqrt{l} \int_0^{\varphi_m} \frac{d\varphi}{\sqrt{2(mgl(1 - \cos\varphi_m) - mgl(1 - \cos\varphi))}} = \\ &= 4\sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\varphi_m} \frac{d\varphi}{\sqrt{2(\cos\varphi - \cos\varphi_m)}} = 2\sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\varphi_m} \frac{d\varphi}{\sqrt{\sin^2 \frac{\varphi_m}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2}}} = \frac{\sin \frac{\varphi}{2}}{\sin \frac{\varphi_m}{2}} = t, \sin \frac{\varphi_m}{2} = k \Rightarrow \\ &= 4\sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-k^2t^2}} \end{aligned}$$

При малых колебаниях мы полагали, что $1 - k^2t^2 \approx 1$. Сейчас же для оценки погрешности предположим, что приблизить эту разность к единице мы уже не можем, однако всё ещё можем считать $k^2t^2 \ll 1$. Тогда

$$\begin{aligned} T &= 4\sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-k^2t^2}} \approx 4\sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \left(1 + \frac{1}{2}k^2t^2\right) = T_0 + 4\sqrt{\frac{l}{g}} \frac{k^2}{2} \int_0^1 \frac{t^2 dt}{\sqrt{1-t^2}} \\ &= T_0 \left(1 + \frac{k^2}{4}\right) = T_0 \left(1 + \frac{\sin^2 \frac{\varphi_m}{2}}{4}\right) \approx T_0 \left(1 + \frac{\varphi_m^2}{16}\right). \end{aligned}$$

Тогда для угла в $\frac{\pi}{6}$ получаем $\frac{T-T_0}{T_0} \approx 0,017 \rightarrow$ погрешность 1,7 %