

Решения задач по математике
Физико-технической контрольной "Выходи решать!"
29 апреля - 2 мая 2022 г.

Составитель – А.Н. Павликов

1. Найдите значение параметра a , при котором уравнение

$$(a^2 - 6a + 8)x^2 + (a^2 - 4)x = a^2 + 3a - 10$$

имеет более двух решений.

Ответ: 2.

2. Дан выпуклый выпуклый многоугольник $A_1A_2 \dots A_{2022}$. Внутри него расположено 777 точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Многоугольник разрезают на треугольники так, что вершинами этих треугольников могут быть только вершины исходного многоугольника и/или отмеченные внутренние точки. Сколько всего треугольников получится? В ответ запишите минимально возможное количество получающихся треугольников.

Ответ: 3574

3. Найдите определитель матрицы размером 2022×2022 , на главной диагонали которой стоят двойки, на двух диагоналях, расположенных рядом с главной, – единицы, остальные элементы равны нулю.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \dots & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Ответ: 2023.

4. Найдите количество действительных корней уравнения

$$x^{47} + x^{12} + 1 = 0.$$

Ответ: 1.

5. В окружность радиуса 1 вписаны правильный пятиугольник, сторона которого равна x , правильный шестиугольник, сторона которого равна y , и правильный десятиугольник, сторона которого равна z . Найдите величину $x^2 + y^2 - z^2$.

Ответ: 2.

Решения задач по математике
Физико-технической контрольной "Выходи решать!"
29 апреля - 2 мая 2022 г.

Составитель – А.Н. Павликов

1. Найдите значение параметра a , при котором уравнение

$$(a^2 - 6a + 8)x^2 + (a^2 - 4)x = a^2 + 3a - 10$$

имеет более двух решений.

Решение. Если старший коэффициент отличен от нуля, то исходное уравнение является квадратным. Но у такого уравнения не может быть более двух корней! Следовательно, исходное уравнение не является квадратным. Тогда $a^2 - 6a + 8 = 0$. Отсюда $a = 2$ или $a = 4$. Подставляя поочередно найденные значения параметра, получим:

При $a = 2$ уравнение превращается в $0 = 0$. Это равенство верно при всех значениях x , следовательно, решений больше двух.

При $a = 4$ уравнение превращается в $12x = 18$. Это уравнение имеет только один корень.

Ответ: 2.

2. Дан выпуклый многоугольник $A_1A_2 \dots A_{2022}$. Внутри него расположено 777 точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Многоугольник разрезают на треугольники так, что вершинами этих треугольников могут быть только вершины исходного многоугольника и/или отмеченные внутренние точки. Сколько всего треугольников получится?

Решение. Сумма внутренних углов всех треугольников равна сумме всех углов исходного 2022-угольника и углов, которые образуются "вокруг" внутренних точек. По сути, каждая внутренняя точка порождает окружность, которая делится лучами на углы. Таким образом, общая сумма всех углов равна

$$180^\circ \cdot (2022 - 2) + 777 \cdot 360^\circ = 643320.$$

Поскольку сумма углов треугольника равна 180° , то количество образовавшихся треугольников равно $643320 : 180 = 3574$.

Ответ: 3574

3. Найдите определитель матрицы размером 2022×2022 , на главной диагонали которой стоят двойки, на двух диагоналях, расположенных рядом с главной, – единицы. Остальные элементы равны нулю.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{vmatrix}.$$

Решение. Понятно, что считать в лоб $2022!$ произведений не хочется. Можно произвести разложение по строке (или столбцу), уменьшая порядок определителя. Однако можно попробовать начать с определителей маленького размера - возможно, это позволит нам увидеть закономерность.

Пусть A_n – определитель n -го порядка. Вычисляем.

$$A_1 = 2;$$

$$A_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3;$$

$$A_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 8 - 2 - 2 = 4.$$

В принципе, уже всё понятно, но для уверенности можно еще вычислить A_4 и убедиться, что получится 5. Появляется гипотеза: $A_n = n + 1$. Докажем ее по индукции.

- 1) Для $n = 1$ проверка уже выполнена.
- 2) Для $n = k$ делаем предположение $A_k = k + 1$.
- 3) Вычислим явно A_{k+1} . Для этого применим теорему о разложении определителя по строке. Заметим, что в последней строке всего два ненулевых элемента. Отсюда:

$$A_{k+1} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \dots & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot A_k - 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \dots & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Еще раз применяя теорему о разложении определителя по строке к вычитаемому, выводим $A_{k+1} = 2 \cdot A_k - 1 \cdot A_{k-1}$. Используя предположение индукции, окончательно получаем,

$$A_{k+1} = 2 \cdot (k + 1) - 1 \cdot k = 2k + 2 - k = k + 2,$$

что завершает доказательство.

В нашей задаче $n = 2022$, то есть $A_{2022} = 2022 + 1 = 2023$.

Ответ: 2023.

4. Найдите количество действительных корней уравнения

$$x^{47} + x^{12} + 1 = 0.$$

Решение. Пробовать решить это уравнение в лоб – безнадежное занятие. Нужна идея. Разложить на множители? Не уверен, что это можно сделать быстрее, чем решить уравнение в лоб. Смотрим на показатели – 47 и 12. Одно число четное, другое нечетное. Это плохо. Почему? Потому что первое слагаемое в левой части является четной функцией, а второе – нечетной. А их сумма – функция общего вида.

Что делать? Замену! Сразу заметим, что $x = 0$ не является корнем уравнения. Делаем замену $t = \frac{1}{x}$ и получаем уравнение

$$\frac{1}{t^{47}} + \frac{1}{t^{12}} + 1 = 0.$$

Теперь избавимся от знаменателей, умножив на t^{47} , что дает

$$t^{47} + t^{35} + 1 = 0.$$

Теперь полный порядок: сумма двух нечетных функций является функцией нечетной. Функция $f(t) = t^{47} + t^{35} + 1$ является монотонно возрастающей, следовательно, принимает каждое свое значение, в том числе и равное нулю, ровно один раз. Отсюда ответ: исходное уравнение имеет единственный корень.

Ответ: 1.

5. В окружность радиуса 1 вписаны правильный пятиугольник, сторона которого равна x , правильный шестиугольник, сторона которого равна y , и правильный десятиугольник, сторона которого равна z . Найдите величину $x^2 + y^2 - z^2$.

Решение. Сразу находится величина $y = 1$, поскольку сторона правильного шестиугольника, вписанного в окружность, равна радиусу этой окружности.

Сложнее обстоит дело с пятиугольником и с десятиугольником. Конечно, можно использовать тригонометрию и явно вычислить стороны обоих многоугольников. Если знать готовые формулы для нахождения этих величин, которые можно найти, к примеру, в учебнике Ж. Адамара "Элементарная геометрия. Часть I. Планиметрия 1948, стр. 158–160, то нетрудно вывести соотношение между ними, а именно, $x^2 = 1 + z^2$.

Отсюда получаем, что $x^2 + y^2 - z^2 = 1 + z^2 + 1 - z^2 = 2$.

Ответ: 2.

6. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x + y = \frac{\pi}{4}, \\ \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = 5 - 2\sqrt{6}. \end{cases}$$

Из всех решений системы выберите такую пару, для которой x является наименьшим положительным числом. В ответе укажите значение выражения $\frac{x}{y}$ для данной пары.

Решение. Напрашивается метод подстановки с очевидной заменой $y = \frac{\pi}{4} - x$. Рекомендую пройти самостоятельно этот путь и получить такой ответ:

$$x = \operatorname{arctg}(\sqrt{6} + \sqrt{3} - \sqrt{2} - 2) + \pi k,$$

$$y = \frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg}(\sqrt{6} + \sqrt{3} - \sqrt{2} - 2) - \pi k,$$

где k – произвольное целое число.

Ответ получен, но что дальше? Как найти нужное отношение? Следовательно, нужна принципиально другая идея. А что если начать не с очевидного шага, связанного с первым уравнением, а посмотреть на второе? Тогда можно получить такое соотношение:

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y &= \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{\sin y}{\cos y} = \frac{2 \sin x \sin y}{2 \cos x \cos y} = \frac{\cos(x-y) - \cos(x+y)}{\cos(x+y) + \cos(x-y)} = \\ &= \frac{\cos(x-y) - \cos \frac{\pi}{4}}{\cos \frac{\pi}{4} + \cos(x-y)}.\end{aligned}$$

Теперь напрашивается замена $t = \cos(x-y)$. Тогда второе уравнение системы превращается в

$$\frac{t - \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2} + t} = 5 - 2\sqrt{6}.$$

Несложные преобразования дают ответ $t = \frac{3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}}{2\sqrt{6} - 4}$. Избавляясь от иррациональности в знаменателе, получим $t = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Делая обратную замену, приходим к простому тригонометрическому уравнению $\cos(x-y) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, решениями которого являются

$$x - y = \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi n,$$

где n – произвольное целое число.

Вспоминая про первое условие исходной системы, получаем две системы линейных уравнений, которые легко решаются:

$$\begin{cases} x + y = \frac{\pi}{4}, \\ x - y = \frac{\pi}{6} + 2\pi n \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} x + y = \frac{\pi}{4}, \\ x - y = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n \end{cases}$$

Решениями этих систем являются следующие серии, соответственно,

$$\begin{cases} x = \frac{5\pi}{24} + \pi n, \\ y = \frac{\pi}{24} - \pi n, \end{cases}$$

где n – произвольное целое число,

и

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{24} + \pi m, \\ y = \frac{5\pi}{24} - \pi m, \end{cases}$$

где m – произвольное целое число.

Выберем теперь такую пару, для которой x является наименьшим положительным числом. Быстро убеждаемся в том, что это $x = \frac{\pi}{24}$ из второй серии решений. При этом $m = 0$ и $y = \frac{5\pi}{24}$.

Отсюда окончательно получаем, что $\frac{x}{y} = \frac{1}{5}$ для данной пары.

Ответ: $\frac{1}{5}$.

Решения задач по математике
Физико-технической контрольной "Выходи решать!"
29 апреля - 2 мая 2022 г.

Составитель – С.А. Жестков

Легкие задачи

1. Параллелограмм разделили пятью прямыми параллельно одной стороне и шестью прямыми параллельно другой. Сколько параллелограммов на картинке?
2. Найти эксцентриситет эллипса, если стороны вписанного в него квадрата проходят через фокусы эллипса.
3. Найти площадь под графиком $y = \ln x$ от $x = 1$ до $x = 4$

Средние задачи

4. Найти неопределенный интеграл $\int \frac{dx}{x^6 + 2x}$.
5. Упростить сумму: $(x - 1)^2 \sum_{k=1}^n kx^{k-1}$
6. Найти массу дуги кривой $y = x^2 + 4$ от точки $A(0, 4)$ до $B(2, 8)$, если плотность в каждой ее точке равна абсциссе этой точки. Ответ может содержать корни.
7. Известно, что приведенные ниже матрицы задают одно и то же преобразование, но в различных базисах. Найти x и y .

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & x \\ -1 & y \end{pmatrix}$$

8. Подбрасываются две правильные игральные кости. Найти вероятность, что на первой выпадет ровно три очка, если известно, что на второй кости выпало меньше очков.
9. Найти предел последовательности: $x_{n+1} = \sqrt{6 + x_n}$, $x_1 = 0$.
10. Найти предел функции: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_2(1 + x)}{x}$
11. Найти определитель порядка n :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 5 & 5 & \dots & 5 & 2 \\ 5 & 5 & \dots & 2 & 5 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 5 & 2 & \dots & 5 & 5 \\ 2 & 5 & \dots & 5 & 5 \end{vmatrix}.$$

Сложные задачи

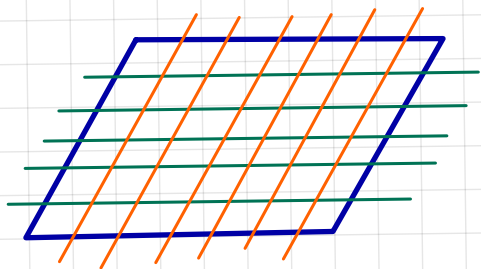
12. Дан выпуклый 10-угольник. Сколько в нем можно выбрать пар диагоналей, не имеющих общих точек (порядок выбора не важен).

13. Для матриц 2 и 3 порядка решить уравнение: $X^2 + E = 0$.

Если ответы существуют, то для матрицы порядка 3 привести его в виде матрицы, элементы которой принадлежат $\mathbb{R}$. Для матрицы порядка 2 ответ привести в виде матрицы, элементы которой принадлежат $\mathbb{Z}$, а сумма их модулей - минимальна.

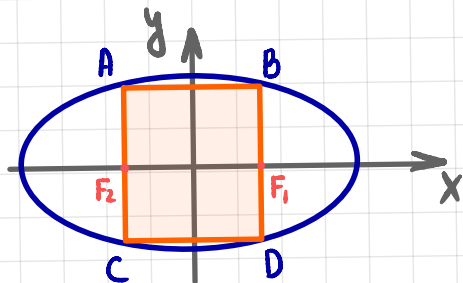
14. Есть 10 городов. Вероятность того, что между двумя городами есть линия связи, равна 0,5. Найти матожидание числа четвёрок городов, которые связаны по принципу "каждый с каждым".

№1



$$N = C_7^2 \cdot C_8^2 = 588$$

№2



$$AB = 2C$$

$$BD = 2BF_1 = 2(a - \epsilon C)$$

$$\left. \begin{aligned} AB &= 2C \\ BD &= 2BF_1 = 2(a - \epsilon C) \end{aligned} \right\} = \begin{aligned} 2C &= 2a - 2\epsilon C \quad | : 2C \\ 1 &= \frac{1}{\epsilon} - \epsilon \Rightarrow \epsilon = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

№3

$$S = \int_1^4 \ln x \, dx =$$

$$\int \ln x \, dx = \left| \begin{array}{l} u = \ln x \\ du = \frac{dx}{x} \end{array} \quad \begin{array}{l} dv = dx \\ v = x \end{array} \right| = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C$$

$$= (4 \ln 4 - 4) - (\ln 1 - 1) = 4 \ln 4 - 3$$

№4

$$I = \int \frac{dx}{x^6 + 2x} = \frac{1}{5} \int \frac{dx^5}{x^5(x^5 + 2)} = \frac{1}{10} \int \left(\frac{1}{x^5} - \frac{1}{x^5 + 2} \right) dx^5 = \frac{1}{10} \ln \left| \frac{x^5}{x^5 + 2} \right| + C$$

№5

$$\begin{aligned} (x-1)^2 \sum_{k=1}^n k \cdot x^{k-1} &= \sum_{k=1}^n (kx^{k+1} - 2kx^k + kx^{k-1}) = \sum_{k=1}^n (kx^{k+1} - (k-1)x^k) - \sum_{k=1}^n ((k+1)x^k - kx^{k-1}) = \\ &= n \cdot x^{n+1} - (n+1) \cdot x^n + 1 \end{aligned}$$

w66 $m = \int_{AB} \rho(x,y) ds = \int_{x_A}^{x_B} x \cdot \sqrt{1+y'^2} dx = \int_0^2 x \cdot \sqrt{1+4x^2} dx = \frac{1}{8} \int_0^2 (1+4x^2)^{\frac{1}{2}} d(1+4x^2) \approx 5,76$

wof $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & x \\ -1 & y \end{pmatrix}$ $\det A = \det B$
 $\text{sp } A = \text{sp } B \Rightarrow 3+7 = 1+y \Rightarrow y=9$ $\Rightarrow \begin{cases} 3 \cdot 7 - 4 \cdot 5 = y + x \\ 1 = 9 + x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7 = y + x \\ 1 = 9 + x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7 = 9 + x \\ 1 = 9 + x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = -8 \end{cases}$

W08 $P(X=3|X>Y)=?$
 $P(X>Y|X=3)=\frac{1}{3}$

$P(X=3|X>Y)=\frac{P(X>Y|X=3) \cdot P(X=3)}{P(X>Y)} = \frac{2}{15}$

$\sum_{i=1}^6 P(X>Y|X=i) \cdot P(X=i)$

w/o $x_1 = 0, x_{n+1} = \sqrt{6 + x_n}$

- По индукции $\rightarrow \{x_n\}$ возрастает

- $x_n^2 < x_{n+1}^2 = 6 + x_n \Rightarrow x_n^2 - x_n - 6 < 0 \Rightarrow x_n < 3$
отсюда

} $\Rightarrow$ По Вейштрассу есть предел

$$a = \sqrt{6+a} \Rightarrow a=3$$

во 10 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_2(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \log_2(1+x)^{\frac{1}{x}} = \log_2(\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}) = \log_2 e = \frac{1}{\ln 2} \approx 1,44$

во 11

$$\begin{vmatrix} 5 & 5 & \dots & 5 & 2 \\ 5 & 5 & \dots & 2 & 5 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 5 & 2 & \dots & 5 & 5 \\ 2 & 5 & \dots & 5 & 5 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \begin{vmatrix} 2 & 5 & \dots & 5 & 5 \\ 5 & 2 & \dots & 5 & 5 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 5 & 5 & \dots & 2 & 5 \\ 2 & 5 & \dots & 5 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{вычтем первую}]{\text{из каждой строки}} (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \begin{vmatrix} 2 & 5 & \dots & 5 & 5 \\ 3 & -3 & & & \\ 3 & & -3 & & \\ \vdots & 0 & & \ddots & \\ 3 & & & & -3 \end{vmatrix} =$$

$$\xrightarrow[\text{прибавим каждый}]{\text{к первой столбцу}} (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \begin{vmatrix} 5n-3 & 5 & \dots & 5 \\ & -3 & & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & -3 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \cdot (5n-3) \cdot (-3)^{n-1}$$

№12

$$N = \text{всего пар диагон.} - \text{число перес.} - \text{число смежных} = 175$$

$$\begin{array}{c} \parallel \\ C^2_{\text{число диаг}} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \parallel \\ C^2_{\frac{n(n-3)}{2}} = C^2_{35} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \parallel \\ \text{число четырех-} \\ \text{-угольников} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \parallel \\ C^4_n = C^4_{10} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \parallel \\ n \cdot C^2_{n-3} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \parallel \\ 10 \cdot C^2_7 \end{array}$$

Замечание: до 19:00 01.05 в условии задачи была опечатка: не было указания, что речь идёт именно о парах диагоналей.

Всем, кто решал задачу до указанного момента, был засчитан также более "очевидный" ответ в 4 диагонали.

№13 Для 3×3 ϕ , т.к. $\det X^2 = (\det X)^2 \geq 0$, $\det E = -1$

Для 2×2 $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (дважды поворот на 90° даст $-Id_X$)

№14 $M(\xi) = M(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_{C_{10}^4})$, где $\xi_i = \begin{cases} 1, & \text{если данная четверка связана} \\ 0, & \text{если нет} \end{cases}$

$$\begin{array}{c} \parallel \\ C_{10}^4 \cdot M(\xi_i) = C_{10}^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6 \approx 3,3 \end{array}$$

Решения задач по математике
Физико-технической контрольной "Выходи решать!"
29 апреля - 2 мая 2022 г.

Составитель – Н.В. Горшунов

№1

Пусть a и b — натуральные числа больше 1, и хотя бы одно из них — составное. Может ли $|a^b - b^a|$ быть простым? Если да — укажите наименьшее возможное значение, если нет — напишите 0.

Решение: Да, например $|4^3 - 3^4| = 17$

№2

Найдите наименьшее натуральное значение n , чтобы среди чисел $n, n+1, n+2, n+3, n+4$ нашлись три числа, сумма которых делится на 13, и три числа, сумма которых делится на 19.

Решение: Это число 10: $12 + 13 + 14 = 39 : 13, 11 + 13 + 14 = 38 : 19$

№3

Найдите минимальное значение интеграла $\int_0^1 f(x)^2 dx$, если $\int_x^1 f(s) ds \geq \frac{1-x^2}{2}$ для любых $x \in [0,1]$. Округлите до сотых.

Решение: $\int_x^1 f(s) ds \geq \frac{1-x^2}{2} \rightarrow f(s) \geq \left(\frac{1-x^2}{2}\right)' = -x$. Тогда $\int_0^1 f(x)^2 dx \geq \int_0^1 x^2 dx = 0.33$

№4

Непрерывная функция $g: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяет условиям

$$\int_0^1 g(x) dx = \int_0^1 xg(x) dx = 1$$

Найдите минимальное значение интеграла $\int_0^1 g(x)^2 dx$. Округлите до сотых.

Решение: подберём линейную функцию $f(x) = kx + b$, удовлетворяющую условиям задачи: $\frac{k}{2} + b = \frac{k}{3} + \frac{b}{2} \rightarrow k = 6, b = -2$. Тогда для любой другой функции, удовлетворяющей условию:

$$\int_0^1 (f(x) - g(x)) dx = \int_0^1 x(f(x) - g(x)) dx = 0 \rightarrow \int_0^1 f(x)(f(x) - g(x)) dx = 0$$

$$\int_0^1 (f(x) - g(x))^2 dx = 0 \rightarrow \int_0^1 g(x)(f(x) - g(x)) dx = \int_0^1 g^2(x) dx - \int_0^1 g(x)(6x - 2) dx = \int_0^1 g^2(x) dx - 4$$

В силу того, что слева под интегралом стоит квадрат разности, то правое выражение также не меньше 0. Тогда минимальное значение $\int_0^1 g^2(x) dx = 4$.