Выходи решать! 2022. Сборник задач и решений

Математика

Задачи 1 (1 балл)

Ограбление банка. Брауну, Джонсу и Смиту предъявлено обвинение в соучастии в ограблении банка. Предполагаемые похитители скрылись на поджидавшем их автомобиле. На следствии Браун показал, что преступники были на синем «Бьюике», Джонс сказал, что это был чёрный «Крайслер», а Смит утверждал, что это был «Форд Мустанг», но ни в коем случае не синий. Стало известно, что, желая запутать следствие, каждый из них указал правильно либо только марку машины, либо её цвет. Какого цвета был автомобиль и какой марки? В ответе выберите одну марку автомобиля и один цвет.

Решение. Рассмотрим высказывания:

$A = \{\text{машина синего цвета}\};$

$B = \{\text{машина марки "Бьюик"}\};$

$C = \{\text{машина чёрного цвета}\};$

$D = \{\text{машина марки "Крайслер"}\};$

$E = \{\text{машина марки "Форд Мустанг"}\}.$

Поскольку каждый участник назвал верно либо марку машины, либо её цвет, то из показаний следует истинность высказываний $A\bar{B}+B\bar{A}$ (Браун), $C\bar{D}+D\bar{C}$ (Джонс) и $\bar{A}\bar{E}+EA$ (Смит). Значит, будет истинным и произведение этих трёх высказываний $P=\left(A\bar{B}+B\bar{A}\right)\left(C\bar{D}+D\bar{C}\right)\left(\bar{A}\bar{E}+EA\right)$. Раскроем скобки:

$$P=\left(A\bar{B}C\bar{D}+A\bar{B}D\bar{C}+B\bar{A}C\bar{D}+B\bar{A}D\bar{C}\right)\left(\bar{A}\bar{E}+EA\right)=A\bar{B}C\bar{D}\bar{A}\bar{E}+A\bar{B}C\bar{D}EA+A\bar{B}D\bar{C}\bar{A}\bar{E}+A\bar{B}D\bar{C}EA+$$
$$+B\bar{A}C\bar{D}\bar{A}\bar{E}+B\bar{A}C\bar{D}EA+B\bar{A}D\bar{C}\bar{A}\bar{E}+B\bar{A}D\bar{C}EA.$$

Сумма восьми слагаемых может быть истинным высказыванием только в том случае, когда хотя бы одно из них истинно. Из определения высказываний A, B, C, D, E сразу же следует, что все слагаемые кроме пятого – ложны. Значит, истинно пятое слагаемое $B\bar{A}C\bar{D}\bar{A}\bar{E}$. А из него следует, что это был чёрный «Бьюик».

Альтернативное решение. Рассмотрим варианты возможного цвета машины. Если Браун сказал правду про цвет (машина синяя), значит, она – не «Бьюик». Поскольку Джонс утверждал, что она чёрная, то он соврал про цвет и сказал верно про марку (это «Крайслер»). Аналогично, Смит соврал про цвет (что машина не синяя), значит это должен быть «Форд Мустанг» – получаем противоречие.

Аналогично, рассматриваем вариант с не-синей машиной: исходя из показаний Смита, это должен быть не «Форд Мустанг». Браун соврал про цвет – значит, это был «Бьюик». Рассматривая показания Джонса, увидим, что возможны только два варианта: либо он соврал про цвет (и тогда это должен быть «Крайслер» - противоречие с Брауном), либо – машина была чёрная и не «Крайслер».

Ответ: чёрный «Бьюик».

Вычисление преступника. Разбирается дело Брауна, Джонса и Смита. Один из них совершил преступление. В ходе следствия каждый из них сделал по два заявления.

Браун: «Я не делал этого. Джонс не делал этого».

Смит: «Я не делал этого. Это сделал Браун».

Джонс: «Браун не делал этого. Это сделал Смит».

Потом оказалось, что один из них дважды сказал правду, другой – дважды солгал, третий – один раз сказал правду и один раз солгал. Кто совершил преступление?

Решение. Один из троих дважды сказал правду. Рассмотрим три варианта.

1) Два раза правду сказал Браун. Отсюда следует, что убийца – Смит. Но тогда получается, что оба высказывания Джонса истинны, что противоречит условию (два человека дважды сказали правду).

2) Два раза правду сказал Джонс. Тогда убийца – Смит; оба высказывания Брауна истинны – противоречие.

3) Так как два предыдущих варианта противоречили условию, остаётся единственная возможность: дважды правду сказал Смит. Это означает, что преступление совершил Браун. Можно убедиться, что при этом Джонс дважды солгал, а Браун в первый раз солгал, а во второй раз сказал правду.

Ответ: Браун.

Три студента. Три друга Антон, Николай и Александр учатся на математическом, физическом и химическом факультетах университета. Если Антон – физик, то Александр не химик, Если Николай не химик, то Антон – физик. Если Александр не физик, то Николай – математик. Какая специальность у Александра?

Решение. Рассмотрим следующие высказывания:

A={Антон – физик};
B={Александр – химик};
C={Николай – химик};
D={Александр – физик};
E={Николай – математик}.

Используя высказывания, запишем условия:

$$A \to \bar{B};$$
$$\bar{C} \to A;$$
$$\bar{D} \to E;$$

Произведение условий:

$$(A \to \bar{B}) \cdot (\bar{C} \to A) \cdot (\bar{D} \to E) =$$
$$= (\bar{A} + \bar{B})(C + A)(D + E) = \bar{A}CD + \bar{B}CD + \bar{A}AD + \bar{B}AD + \bar{A}CE + \bar{B}CE + \bar{A}AE + \bar{B}AE.$$

Из определения высказываний следует, что все слагаемые кроме $\bar{A}CD$ и $\bar{B}CD$ ложны. Откуда следует, что Александр – физик.

Альтернативное решение. Рассмотрим каждый из случаев:

1. Если Антон – физик, то Александр – математик (т.к. не может быть химиком), Николай – химик. Но тогда, согласно условию, Николай должен быть математиком (т.к. Александр не физик) – получаем противоречие.
2. Если Антон – химик, то Николай – не химик, а значит Антон – физик, что тоже является противоречием.

3. Если Антон – математик, то либо Александр – химик, и тогда Николай тоже должен быть математиком (противоречие), либо Александр – физик, и тогда Николай – математик, и никаких условий на такое сочетание в тексте задачи нет, т.е. противоречий тоже нет.

Ответ: физик.

Работа комиссара. Вернувшись домой, Мегрэ позвонил на набережную Орфевр.
– Говорит Мегрэ. Есть новости?
– Да, шеф. Поступили сообщения от инспекторов. Торранс установил, что если Франсуа был пьян, то либо Этьен – убийца, либо Франсуа лжёт. Жуссье считает, что или Этьен – убийца, или Франсуа не был пьян и убийство произошло после полуночи. Инспектор Люка попросил передать Вам, что если убийство произошло после полуночи, то либо Этьен – убийца, либо Франсуа лжёт. Затем звонила …
– Всё, спасибо. Этого достаточно.
Комиссар положил трубку. Он знал, что трезвый Франсуа никогда не лжёт. Теперь он знал всё. Какой вывод сделал комиссар Мегрэ? (необходимо выбрать вывод/выводы, однозначно следующие из условия)

Решение. Рассмотрим следующие высказывания:

$A=$ {Франсуа был пьян};
$B=$ {Этьен – убийца};
$C=$ {Франсуа лжёт};
$D=$ {убийство произошло после полуночи}.

Запишем высказывания инспекторов:

Торранс: $A\to(B+C)$;
Жуссье: $B+\overline{A}\cdot D$;
Люка: $D\to(B+C)$.

Произведение высказываний инспекторов:

$$\left(A\to(B+C)\right)\cdot\left(B+\overline{A}D\right)\cdot\left(D\to(B+C)\right)=$$
$$=\left(\overline{A}+B+C\right)\left(B+\overline{A}D\right)\cdot\left(\overline{D}+B+C\right)=$$
$$=\left(\overline{A}B+\overline{A}\cdot\overline{A}D+BB+B\overline{A}D+CB+C\overline{A}D\right)\cdot\left(\overline{D}+B+C\right)=$$
$$=\left(\overline{A}B+\overline{A}D+B+\overline{A}BD+BC+\overline{A}CD\right)\cdot\left(B+C+\overline{D}\right)=$$
$$=\overline{A}BB+\overline{A}BC+\overline{A}B\overline{D}+\overline{A}BD+\overline{A}CD+\overline{A}D\overline{D}+BB+BC+B\overline{D}+$$
$$+\overline{A}BBD+\overline{A}BCD+\overline{A}BD\overline{D}+BBC+BCC+BC\overline{D}+\overline{A}BCD+\overline{A}CCD+$$
$$+\overline{A}CD\overline{D}=\overline{A}B+\overline{A}BC+\overline{A}B\overline{D}+\overline{A}BD+\overline{A}CD+0+B+BC+B\overline{D}+$$
$$+\overline{A}BD+\overline{A}BCD+0+BC+BC+BC\overline{D}+\overline{A}BCD+\overline{A}CD+0=$$
$$=B\left(\overline{A}+\overline{A}C+\overline{A}\overline{D}+\overline{A}D+1+C+\overline{D}+\overline{A}D+\overline{A}CD+C+C+C\overline{D}+\overline{A}CD\right)+$$
$$+\overline{A}CD=B+\overline{A}CD.$$

(Здесь единицей обозначено истинное высказывание).

Другими словами, возможно всего два варианта: либо Этьен – убийца, либо одновременно выполняются три условия: Франсуа не был пьян, Франсуа лжёт, убийство произошло после полуночи. Поскольку трезвый Франсуа никогда не лжёт, второе невозможно, и Мегрэ сделал вывод, что Этьен убийца.

Ответ: Ответ: «Этьен убийца».

Семейные разборки. Один из пяти братьев разбил тарелку. Андрей сказал: «Это Витя или Толя». Витя сказал: «Это сделал не я и не Юра». Толя сказал: «Вы оба не правы». Дима сказал: «Нет, один из них сказал правду, а другой – нет». Юра сказал: «Нет, Дима, ты не прав». Мама знает, что трое из её сыновей всегда говорят правду. Кто разбил тарелку?

Решение. Обозначим высказывания Андрея и Вити через A и B. Если оба высказывания A и B истинны (из этого следует, что тарелку разбил Толя), то высказывания Толи и Димы ложны, а высказывание Юры – истинное, что удовлетворяет условию задачи (как минимум три истинных высказывания).

Если A истинно, а B ложно (или наоборот), то выходит, что Толя и Юра сказали неправду, что не подходит по условию (трое соврали).

Если A и B ложны, то так как высказывания Димы и Юры противоположны, трёх истинных высказываний не наберётся.

Значит, возможен только первый из рассматриваемых случаев и тарелку разбил Толя.

Ответ: Толя.

Задачи №2 (2 балла)

Футбольный турнир. 16 футбольных команд сыграли в двухкруговой турнир (каждая команда сыграла с каждой по два раза). Найдите, сколько всего игр было проведено между командами.

Решение. В футбольном двухкруговом турнире существует понятие «хозяин поля», которое означает команду, играющую на своём стадионе. Исходя из этого, порядок команд при выборе пары имеет значение. Таким образом, количество игр считается по правилу произведения: количество способов выбрать хозяина поля – 16, количество способов выбрать его соперника – 15, количество игр – $16 \times 15 = 240$.

Ответ: 240.

Ошибка в расчётах. Гуляя по парку, Ваня встретил загадочного молодого человека. Человек утверждал, что способен наугад вытащить из обычной игральной колоды в 36 карт 4 карты так, чтобы среди них всегда был хотя бы один туз. Он предлагал приз любому, кто сможет перетасовать колоду таким образом, чтобы вытащить туз не получилось. Ваня хорошо знал математику и быстро понял, что вероятность заявленного человеком исхода не слишком велика (вероятность вытащить из 36 четыре карты так, чтобы среди них был хотя бы один туз). А потому решил сыграть с молодым человеком. Однако, вопреки расчётам, за 10 игр выиграть приз ему так и не удалось – и, как потом выяснилось, не из-за ошибки в расчётах. Чему была равна найденная Ваней вероятность? Ответ округлите до десятых. Карты вытягиваются одновременно.

Решение. Элементами события будут все сочетания из четырёх карт – их C_{36}^4.

Благоприятными для шарлатана исходами будут все сочетания, в которых есть хотя бы один туз. Количество таких исходов вычислим, отняв от количества всех исходов количество неблагоприятных исходов, т.е. сочетаний, в которых тузов нет. Количество последних равно C_{32}^4, т. к. для того, чтобы в вытащенных 4-х картах тузов не было, нужно заранее убрать эти четыре туза из колоды и среди оставшихся 32-х карт выбрать четыре. Таким образом, искомая вероятность:

$$\frac{C_{36}^4 - C_{32}^4}{C_{36}^4} \approx 0,4.$$

Ответ: 0,4

Противостояние ладьей. На шахматной доске в клетке с3 «вырыли яму». Сколькими способами можно поставить на шахматную доску чёрную и белую ладьи так, чтобы они не били друг друга, если на клетку с ямой ставить ладью нельзя и две ладьи, стоящие в одной вертикали/горизонтали «через яму» друг друга не бьют.

Решение. Для начала, посчитаем общее количество способов расставить две ладьи так, чтобы они не били друг друга, если клетка с3 существует. Общее количество способов считается следующим образом: одну ладью можно поставить 64-ю способами на любую клетку. Другую ладью можно поставить на 49 клеток, которые не бьёт первая ладья. Тогда получаем $64 \cdot 49 = 3136$ способов. Однако, если в клетке с3 «вырыть яму», то в этом ответе некоторое количество вариантов являются «*лишними*», а некоторые, наоборот, «*неучтёнными*».

«Неучтёнными» являются варианты, когда две ладьи стоят в третьей строке или в третьем столбце, причем клетка с3 стоит между ними. Они били друг друга, пока клетка с3 была без «ямы», и мы их не учитывали. Теперь ладьи в этом положении не бьют друг друга. Если эти ладьи стоят в третьей строке, то у белой ладьи, стоящей слева от с3 – 2 способа расположения, у чёрной ладьи, стоящей справа от с3 – 5 способов расположения, всего $2\cdot5=10$ способов. Столько же способов будет, если чёрную и белую ладьи поменять местами. Таким образом, 20 способов по третьей строке, ещё 20 – по третьему столбцу. Итого, 40 способов являются «*неучтенными*».

«Лишними» являются варианты, когда одна из ладей стоит в клетке с «ямой». Если белая ладья стоит в клетке с «ямой», тогда чёрная ладья стоит в одной из 49 клеток, которые «не бьет» белая. Аналогично, если чёрная ладья стоит в «яме». Следовательно, количество «*лишних*» способов – $2\cdot49=98$.

Таким образом, $3136-98+40=3078$ способов.

Ответ: 3078.

Шахматный турнир. В шахматном турнире среди участников были две женщины. Каждый участник турнира играл с остальными участниками по две партии. Число партий, сыгранных мужчинами между собой, оказалось на 66 больше числа партий, сыгранных мужчинами с женщинами. Сколько всего было участников в турнире и сколько всего партий было сыграно? В ответе запишите вначале количество участников, а затем, через пробел – количество сыгранных партий.

Решение. Пусть n – число участников турнира. Тогда количество партий, сыгранных мужчинами с женщинами:

$$4(n-2).$$

Количество партий, сыгранных мужчинами между собой:

$$(n-2)(n-3).$$

Используя условие, составляем уравнение:

$$(n-2)(n-3)-4(n-2)=66.$$

Откуда получаем:

$$n=13.$$

Количество партий, сыгранных в турнире:

$$n(n-1)=13\cdot12=156.$$

Ответ: 13 156.

Политическое противостояние. Сколькими способами можно поставить на шахматную доску чёрного и белого короля так, чтобы они не били друг друга?

Решение. Поставим для начала на доску белого короля. Невозможна ситуация, когда один король бьёт другого, а второй – не бьёт первого. Таким образом, достаточно поставить чёрного короля на одно из мест, которые не бьёт белый король.

Количество клеток, битых первым королём будет зависеть от его местоположения.

Если белый король стоит в углах (4 способа), он бьёт 3 клетки и чёрный король может стоять на оставшихся $(64-1-3)=60$ клетках.

Если белый король стоит на одной из сторон шахматной доски (24 способа), но не в угле, он бьёт 5 клеток и чёрный король может стоять на оставшихся $(64-1-5)=58$ клетках.

Наконец, если белый король стоит не на краю шахматной доски (36 способов), он бьёт 8 клеток и чёрный король может стоять на оставшихся $(64-1-8)=55$ клетках.

Согласно правилам суммы и произведения, общее количество способов поставить белого и чёрного короля, не бьющих друг друга, равняется $4\cdot 60+24\cdot 58+36\cdot 55=3612$.

Ответ: 3612.

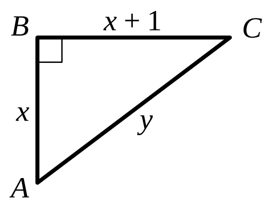
Задачи №3 (3 балла)

Странная траектория. Мотоциклист проехал по замкнутому пути *ABCA* такому, что ABC – прямоугольный треугольник с катетами *AB* и *BC*, причём AB+1=BC (км). По участкам *AB* и *BC* мотоциклист ехал со скоростью 41 км/ч, а на промежутке *CA* пошёл дождь, и вследствие ухудшения погодных условий скорость была снижена до 29 км/ч. В результате оказалось, что на путь *ABC* вдоль катетов треугольника мотоциклист затратил столько же времени, сколько и на путь вдоль гипотенузы *CA*.

Определите длину пути *ABCA*, пройденного мотоциклистом. Ответ выразить в км.

Решение. Пусть $AB = x, \quad AC = y$. Тогда $BC = x+1$ (см. рисунок). Время, затраченное на путь по катетам, равно $\dfrac{x+(x+1)}{41}$, а на путь по гипотенузе – $\dfrac{y}{29}$. По условию эти времена совпадают. Записывая также теорему Пифагора для треугольника, получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{2x+1}{41} = \dfrac{y}{29}, \\ x^2 + (x+1)^2 = y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{29}{41}(2x+1), \\ 2x^2 + 2x + 1 = \dfrac{841}{1681}\left(4x^2+4x+1\right) \end{cases} \Leftrightarrow$$



$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{29}{41}(2x+1), \\ x^2 + x - 420 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 20, \\ y = 29. \end{cases}$$

В последнем переходе мы отбросили отрицательный корень квадратного уравнения, так как он не подходит по смыслу задачи.

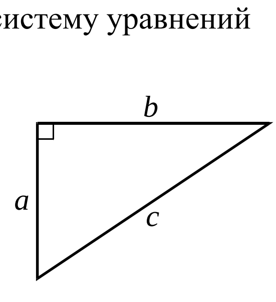
Длина пути мотоциклиста равна $(2x+1) + y = 70$ км.

Ответ: 70.

Необычный участок. Алексею с братом в наследство от отца достался прямоугольный участок площадью 4800 м². Никто из братьев не хотел отказываться от наследства, а потому они решили поделить участок пополам. Но необычным образом: по диагонали. В результате Алексею достался участок вдвое меньшей площадью (2400 м²) в форме прямоугольного треугольника. Выяснилось, что периметр образовавшегося участка (периметр треугольника) равен 240 м. А чему в этом случае равны его стороны? В ответ запишите длины сторон в метрах в порядке возрастания через пробел.

Решение. Обозначим стороны участка a, b, c (см. рисунок). Тогда из условия следует, что $a+b+c = 240$; $\dfrac{ab}{2} = 2400$. Учитывая также теорему Пифагора, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} a+b+c = 240, \\ ab = 4800, \\ a^2 + b^2 = c^2. \end{cases}$$



Сложим второе уравнение, умноженное на 2, с третьим уравнением:

$$(a+b)^2 = c^2 + 9600. \qquad (1)$$

Выразим из первого уравнения системы $(a+b)$ и подставим в (1):

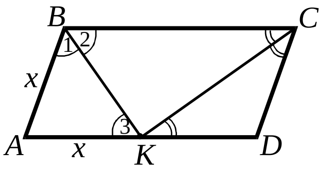
$$(240-c)^2 = c^2 + 9600$$
$$57600 - 480c + c^2 = c^2 + 9600$$
$$c = 100.$$

Отсюда сразу следует, что $a+b=140$.

Решая систему $\begin{cases} a+b=140, \\ ab=4800, \end{cases}$ получаем две возможности: $a=80, b=60$ или $a=60, b=80$. Значит, стороны участка равны 60 м, 80 м и 100 м.

Ответ: 60 80 100.

Триангуляция. При составлении топографических карт и определении расстояний между объектами часто используется метод триангуляции. В рамках триангуляции вся местность разбивается на треугольники, вершинами которых являются опорные пункты (различные ориентиры). В этих треугольниках измеряются углы и длины некоторых сторон. При построении одной из карт оказалось, что два треугольника вместе составили параллелограмм ABCD. При этом его периметр оказался равен 3000 м, а биссектрисы углов B и C пересекли сторону AD в одной точке. Найдите стороны этого параллелограмма. В ответ запишите вначале длину меньшей стороны, а затем, через пробел – длину большей стороны. Ответ выразите в метрах.



Решение. $ABCD$ – параллелограмм. BK и CK – биссектрисы углов B и C соответственно (см. рисунок). Пусть $AB=x$. BK – биссектриса, $\angle 1 = \angle 2$. Прямая BK пересекает параллельные прямые BC и AK, поэтому $\angle 2 = \angle 3$. Значит, $\angle 1 = \angle 3$, $\triangle BAK$ – равнобедренный, $AK = AB$. Аналогично устанавливается, что $KD = CD$. Откуда следует, что $AD = 2x$.

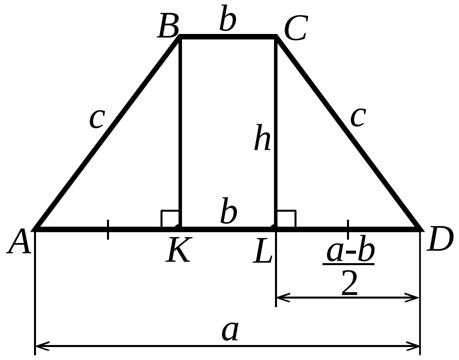
По условию:
$$P = 2(AB + AD) = 3000 \text{ м}.$$
Откуда следует:
$$2(x+2x) = 3000 \quad \Rightarrow \quad x = 500 \text{ м}.$$
Таким образом:
$$AB = 500 \text{ м}, \; AD = 1000 \text{ м}.$$

Ответ: 500 1000.

Средняя линия. Длина средней линии равнобокой трапеции равна 5. Известно, что в трапецию можно вписать окружность. Средняя линия делит трапецию на две части, отношение площадей которых равно 7:13. Найдите длину высоты трапеции.

Решение. Пусть a и b – длины большего и меньшего основания соответственно (см. рисунок). Используя свойства средней линии, получаем систему:
$$\begin{cases} \dfrac{b+5}{a+5} = \dfrac{7}{13}, \\ a+b=10. \end{cases}$$
Откуда находим: $a=8, b=2$.

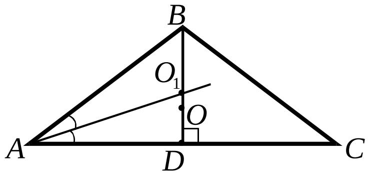
Так как в эту равнобокую трапецию можно вписать окружность, то длина боковой стороны c:
$$2c = a+b \Rightarrow c = \tfrac{a+b}{2} = 5.$$



Проведём высоты BK и CL. Так как трапеция равнобокая, то $AK = LD$. Отсюда следует, что $LD = \dfrac{a-b}{2}$. Далее, из прямоугольного треугольника DLC по теореме Пифагора находим длину высоты h:

$$h = \sqrt{c^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2} = \sqrt{25-9} = 4.$$

Ответ: 4.



Греческая эстетика. Художник получил заказ на украшение фронтона здания городской администрации. Форма фронтона представляет собой равнобедренный треугольник с размером основания 24 м и боковой стороной равной 15 м. По некоторым эстетическим соображениям художник решил поместить один элемент композиции в точку пересечения медиан, а другой элемент – в точку пересечения биссектрис треугольника фронтона. Найдите расстояние между этими точками, выразив его в метрах.

Замечание. Подобными соображениями пользовались древние греки при проектировании и постройке архитектурных шедевров афинского Акрополя, в частности Парфенона.

Решение. Пусть ABC – этот самый равнобедренный треугольник. Тогда в нём высота BD является медианой и биссектрисой (см. рисунок), а значит, точка пересечения медиан и точка пересечения биссектрис лежат на BD. Используя свойства равнобедренного треугольника, находим BD:

$$BD = \sqrt{(AB)^2 - (AD)^2} = \sqrt{(AB)^2 - \left(\frac{AC}{2}\right)^2} = \sqrt{15^2 - 12^2} = 9.$$

Пусть O_1 – точка пересечения биссектрис. AO_1 – биссектриса треугольника ABD. По свойству биссектрисы: $\dfrac{BO_1}{O_1D} = \dfrac{AB}{AD} = \dfrac{5}{4} \quad \Rightarrow \quad BO_1 = \dfrac{5}{9}BD$. Если O – точка пересечения медиан, то $BO = \dfrac{2}{3}BD$. Далее находим расстояние между точкой пересечения медиан и точкой пересечения биссектрис:

$$OO_1 = BO - BO_1 = \left(\frac{2}{3} - \frac{5}{9}\right)BD = \frac{1}{9}BD = 1.$$

Ответ: 1.

Задачи №4 (3 балла)

Бассейн и краны. Два крана наполнили бассейн за 15 минут, причем первый кран был включен на 7 минут позже второго. Известно, что с помощью первого крана бассейн наполняется на 5 минут быстрее, чем с помощью второго. За сколько минут может заполнить бассейн каждый кран, работая отдельно. В ответе запишите вначале время заполнения бассейна первым краном, а затем, через пробел – вторым.

Решение. Пусть x (мин) – время, за которое заполняется бассейн с помощью первого крана. Тогда $x+5$ (мин) – время заполнения вторым краном. По условию, чтобы наполнить бассейн, первый кран был включен 8 мин, а второй – 15 минут. Получаем уравнение $\frac{8}{x}+\frac{15}{x+5}=1$. При условии, что $x\neq 0$ и $x\neq -5$, исходное уравнение равносильно квадратному $x^2-18x-40=0$. Его корни: $x=20, x=-2$. Корень $x=-2$ не подходит, так как по условию задачи время не может быть отрицательным. Следовательно, первый кран за 20 минут заполнит бассейн, а второй – за 25 минут.

Ответ: 20 25.

Выгодный расчёт. В сосуде было 20 л чистого спирта. Часть этого спирта отлили, а сосуд долили водой. Затем отлили столько же литров смеси и сосуд опять долили водой. После этого в сосуде оказалось чистого спирта втрое меньше, чем воды. Сколько литров спирта отлили в первый раз? Незначительным уменьшением суммарного объёма при растворении спирта в воде пренебречь.

Решение. Пусть в первый раз отлили x литров спирта ($0<x\leq 20$). Тогда во второй раз отлили $\frac{20-x}{20}\cdot x$ литров. В итоге спирта осталось втрое меньше, чем воды, значит, спирт составляет четвертую часть всего раствора – это 5 литров. Тогда отлили 15 литров спирта или, выражая, через переменную, $x+\frac{20-x}{20}\cdot x$. Получаем квадратное уравнение: $x+\frac{20-x}{20}\cdot x=15$ или $x^2-40x+300=0$. Решая его, находим $x=10$ или $x=30$ (последний корень не подходит по условию задачи).

Ответ: 10.

Железнодорожное сообщение. Из двух пунктов, расстояние между которыми 2400 км, навстречу друг другу выезжают одновременно пассажирский и скорый поезда. Каждый из них идёт с постоянной скоростью, и через 15 часов они встречаются. Найдите скорость скорого поезда (км/ч), если в конечный пункт скорый поезд прибывает на 16 часов раньше пассажирского.

Решение. Пусть $v_{\text{п}}$ – скорость пассажирского поезда, а $v_{\text{с}}$ – скорость скорого поезда. Тогда:

$$\begin{cases} \dfrac{2400}{v_п + v_с} = 15 \\ \dfrac{2400}{v_п} - \dfrac{2400}{v_с} = 16 \end{cases}$$

Решая систему, приходим к квадратному уравнению:

$$\begin{cases} \dfrac{2400}{v_п + v_с} = 15 \\ \dfrac{2400}{v_п} - \dfrac{2400}{v_с} = 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_п + v_с = 160 \\ \dfrac{150}{v_п} - \dfrac{150}{v_с} = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_с^2 + 140v_с - 24000 = 0$$

Решая, полученное квадратное уравнение, находим $v_с = 100$ км/ч (корень $v_с = -240$ отбрасываем, так как по условию задачи скорость не может быть отрицательной).

Ответ: 100.

Ремонтные работы. Из-за ремонтных работ товарный поезд был задержан в пути на 1/5 часа. На расстоянии 60 км ему удалось наверстать потерянное время, увеличив скорость на 15 км/ч. Найдите первоначальную скорость поезда (ответ выразите в км/ч).

Решение. Обозначим через v первоначальную скорость поезда ($v > 0$). Если бы указанные в условии 60 км поезд ехал со скоростью v, то он бы затратил на этот путь время $t_1 = \dfrac{60}{v}$ часов.

Поскольку поезд был задержан в пути на $\dfrac{1}{5}$ часа, а затем двигался со скоростью $(v+15)$ км/ч, то на тот же путь он затратил время $t_2 = \dfrac{1}{5} + \dfrac{60}{v+15}$ часов.

Согласно условию $t_1 = t_2$, откуда получаем:

$$\frac{60}{v} = \frac{1}{5} + \frac{60}{v+15},$$

$$60 \cdot 5(v+15) = v(v+15) + 60 \cdot 5v,$$

$$300v + 4500 = v^2 + 15v + 300v,$$

$$v^2 + 15v - 4500 = 0.$$

Решив полученное квадратное уравнение, находим $v = 60$ км/ч (корень $v = -75$ км/ч отбрасываем)

Ответ: 60 км/ч.

Одинокий Лёша. Ваня, Саша и Лёша придумали способ надувать матрас сразу несколькими насосами. Все вместе они надувают матрас за 3 минуты, причём Ваня производительней Саши в два раза. Если матрас надувать будут только двое мальчиков: сначала на 1/2 объёма – Ваня и

Лёша, а затем на 1/2 объёма – Саша и Лёша, то он надуется за 5 минут. За сколько минут надуется матрас, если Ваня и Саша уйдут плавать, а работать будет только Лёша?

Решение. Примем объём матраса за 1. Пусть Ваня надувает матрас за x минут, Саша – за y минут, Лёша – за z минут. Из условия задачи следует, что $y = 2x$. Производительности мальчиков, соответственно, $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{2x}$, $\frac{1}{z}$.

Все вместе они надувают матрас за 3 часа, откуда получаем:

$$\frac{1}{\frac{1}{x}+\frac{1}{2x}+\frac{1}{z}}=3,$$

$$\frac{3}{2x}+\frac{1}{z}=\frac{1}{3}. \qquad (1)$$

Из второго условия задачи следует:

$$\frac{1}{2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{z}\right)}+\frac{1}{2\left(\frac{1}{2x}+\frac{1}{z}\right)}=5 \qquad (2)$$

Из уравнения (1) получаем: $\frac{1}{x}=\frac{2}{9}-\frac{2}{3z}$. Подставляем полученное выражение для $\frac{1}{x}$ в уравнение (2):

$$\frac{1}{2\left(\frac{2}{9}-\frac{2}{3z}+\frac{1}{z}\right)}+\frac{1}{2\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{3z}+\frac{1}{z}\right)}=5,$$

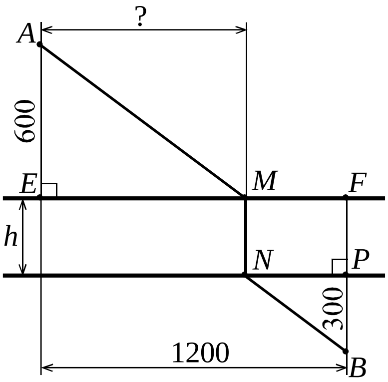
$$7z^2-69z-180=0.$$

Решив полученное квадратное уравнение, находим $z = 12$ минут (корень $z=-\frac{15}{7}$ отбрасываем, так как по условию задачи время не может быть отрицательным).

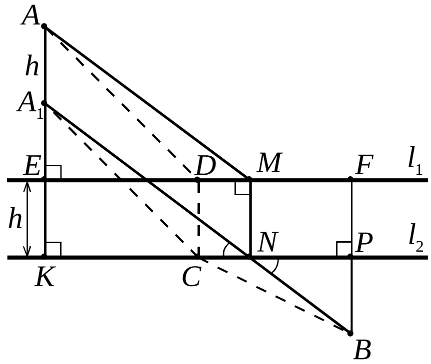
Ответ: 12.

Задачи №5 (4 балла)

Инженерный вопрос. По разные стороны канала с прямыми параллельными берегами и шириной h расположены населённые пункты А и В (см. рисунок). Расстояние от пункта А до ближайшего берега равно 600 м, а от пункта В – 300 м. Расстояние между пунктами А и В вдоль канала (расстояние EF) – 1200 м. В каком месте должен быть построен мост через канал (каким должно быть расстояние EM), чтобы сумма расстояний от А до моста (AM) и от В до моста (BN) была наименьшей? Заметим, что это оптимальное положение моста. В ответе запишите расстояние EM, выразив в метрах.



Решение. Берега канала – параллельные прямые l_1 и l_2 (см. рисунок). Проведём $AK \perp l_2$ и на прямой AK отложим отрезок $AA_1 = h$. Соединим точки A_1 и B; отрезок A_1B пересечёт прямую l_2 в точке N. Точка N определяет положение моста MN.



По построению AA_1NM – параллелограмм, $AM = A_1N$, поэтому сумма расстояний от A и B до моста равна:

$$AM + NB = A_1N + NB = A_1B.$$

Если мост CD построить в другом месте, то AA_1CD – параллелограмм, $AD = A_1C$ и $AD + BC = A_1C + CB > A_1B$ (неравенство треугольника для $\triangle A_1CB$).

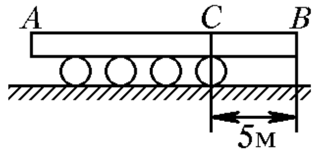
Определившись геометрически с положением моста MN, найдём расстояние EM. По построению и условию: $A_1K = AE = 600$ м, $EM = KN$, $KN + NP = EF = 1200$ м, $BP = 300$ м. $\triangle A_1KN$ подобен $\triangle BPN$ (по двум углам: $\angle A_1KN = \angle BPN = 90°$, $\angle A_1NK = \angle BNP$ – как вертикальные). С помощью свойств подобия и используя данные построения и условия, находим:

$$\begin{cases} \dfrac{KN}{NP} = \dfrac{A_1K}{BP} \\ KN + NP = EF \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{KN}{NP} = \dfrac{600}{300} \\ KN + NP = 1200 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{KN}{NP} = 2 \\ KN + NP = 1200 \end{cases} \Rightarrow EM = KN = 800 \text{ м}.$$

Заметим, что ширина канала h не влияет на ответ

Ответ: 800.

Перекатывание балки. Тяжёлая балка AB лежит на брёвнах (катках), которые лежат на горизонтальной ровной поверхности (см. рисунок). Её правый конец отстоит от оси крайнего правого бревна на 5 м (BC = 5 м). Балку, при помощи таких катков, перемещают влево. На сколько метров переместится передняя часть балки (точка A) к тому моменту, когда точка B окажется над осью крайнего правого бревна? Считать брёвна одинаковыми круговыми цилиндрами; катятся брёвна без проскальзывания; в течении всего времени движения балка находится на брёвнах (не опрокидывается).



Решение. Когда точка B достигнет оси крайнего правого бревна, сами брёвна прокатятся на расстояние BC, а балка относительно брёвен также переместится на расстояние BC. Таким образом, передняя часть балки (точка A) продвинется по направлению движения на расстояние $2BC$, т. е. на 10 метров.

Ответ: 10.

Пристройка. После постройки дома с размером основания 15 х 20 метров у Антона осталось материала ещё на 20 метров стены. Тогда Антон решил пристроить к своему дому дополнительное помещение под мастерские. Какая максимальная площадь пристройки (м²) может получиться?
Считать, что дом и пристройка имеют основание прямоугольной формы и могут иметь общую стену, а размер пристройки ограничивается только остатком материала на стены.

Решение (одно из возможных решений)**.** Эту задачу можно решить, используя теорию производных или свойства параболы. Предлагается решение методом выделения полного квадрата.

Пусть x – длина одной из стен пристройки. Так как в качестве четвёртой стены предполагается использовать стену дома, то площадь пристройки:

$$S = x(20 - 2x).$$

Выделяя полный квадрат, найдём максимально возможную площадь:

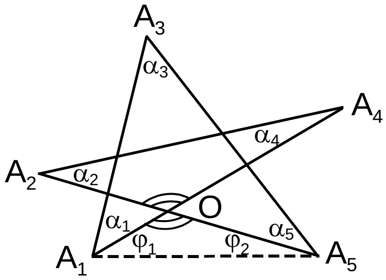
$$S = x(20 - 2x) = -2x^2 + 20x + 50 - 50 =$$
$$-2(x^2 - 10x + 25) + 50 = -2(x-5)^2 + 50.$$

Так как первое слагаемое в получившемся выражении всегда неположительное, то максимальная площадь пристройки 50 м^2 получается при $x = 5$. Тогда длина другой стены – 10 м. Поскольку стороны дома (15 и 20 м) длиннее, чем длина пристройки, любую стену дома можно использовать как четвёртую стену пристройки. То есть 50 м^2 – максимально возможная площадь для данных условий.

Ответ: 50.

Неправильная звезда. У произвольной пятиконечной звезды найдите сумму углов лучей, т. е. $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5$ (см. рисунок). Ответ выразите в градусах, значок градуса писать не нужно.

Решение. На рисунке вертикальные углы при вершине O в треугольниках A_1OA_5 и A_2OA_4 равны, поэтому $\varphi_2+\varphi_2=\alpha_2+\alpha_4$ (см. рисунок).



$$\Delta A_1A_3A_5:(\alpha_1+\varphi_1)+\alpha_3+(\alpha_5+\varphi_2)=180^\circ,$$

т. е. $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5=180^\circ.$

Ответ: 180°.

Остроугольный многоугольник. Какое наибольшее число острых углов может иметь выпуклый 2022 – угольник?

Решение. Сумма внутреннего и внешнего угла при вершине любого выпуклого многоугольника равна 180°; если у многоугольника n вершин, то общая сумма внешних и внутренних углов равна $180^\circ \cdot n$. Сумма внутренних углов выпуклого $n-$ угольника равна $180^\circ \cdot (n-2)$, поэтому сумма внешних углов любого выпуклого $n-$ угольника равна $(180^\circ \cdot n) - 180^\circ \cdot (n-2) = 360^\circ$. Поскольку для острого внутреннего угла внешний будет тупым (большим 90º), то 4 или более острых внутренних углов $2022-$угольник содержать не может. Таким образом, выпуклый $2022-$ угольник может иметь не более трёх острых углов.

Ответ: 3.