

Ответы и решения – Математика

Линейка задач № 1

№1.

Виталий очень любил свою жену и всегда давал ей деньги на исполнение её желаний. Однако, он не мог не позабыть с того факта, что сумма, которую она попросит, напрямую связана со словами, которые прозвучат в диалоге. В какой-то момент он захотел структурировать накопленные знания и составил табличку:

Фраза	Средняя сумма, руб.
«Дорогой, а можно...»	1 000
«А я вчера подружкам рассказывала, какой ты у меня замечательный...»	3 000
«Я сегодня такую штучку видела!..»	2 000
«Ты знаешь, а вот у Светки есть...»	5 000
«Ты у меня такой хороший...»	3 000
<i>*Молчаливо смотрит щенячьими глазами*</i>	10 000

Однажды жена увидела такую вещицу, что сперва упомянула, что она уже есть у Светки, потом дважды ссылаясь на то, что Виталий – хороший, рассказала ему про то, что об этом знают подружки, после чего просто долго смотрела щенячьими глазами. Виталий, конечно же, дал денег, а потом показал табличку – и оба посмеялись от такого точного совпадения. Сколько рублей стоил презент?

Решение:

Согласно табличке, презент стоил $5\,000 + 2 * 3\,000 + 3\,000 + 10\,000 = 24\,000$ рублей.

Ответ: 24 000.

№2

Маша занимается плетением браслетов из бисера, одновременно используя нити трёх разных цветов. Маша уже использовала 1,5 метра голубой нити, 1 метр белой и 0,75 метра зелёной. Когда она примеряла этот браслет, оказалось, что до полного обхвата не хватает трех сантиметров длины. Сколько еще метров голубой нити потребуется Маше, чтобы довязать браслет с этим же узором, если пока связано 10 см? Нити разных цветов расходуются равномерно.

Решение.

Пусть x – искомая длина нити. Тогда $\frac{3}{10} = \frac{x}{1,5}$, отсюда получаем, что требуемая длина – 0,45 метров.

Ответ: 0,45.

№3

В невышедшей серии “Атаки Титанов” была битва между солдатами Марлии и Элдии. Изначально солдат Элдии было в два раза больше, чем солдат Марлии. Когда к солдатам Элдии примкнул ещё и Эрен, их в совокупности стало в два и одну третью раза больше. Сколько солдат изначально участвовало в битве?

Решение.

Пусть элдийцев было x , а марлийцев – y . Тогда $x = 2y$, $x + 1 = 2\frac{1}{3}y$. То есть $\frac{1}{3}y = 1$, откуда $y = 3$, $x = 6$, а всего было 9 человек.

Ответ: 9.

№4

Для устранения аллергии требуется 20 мг действующего вещества на 10 кг веса человека. Сколько таблеток должен употребить Миша весом 70 кг, если в одной таблетке 10 мг вещества?

Решение.

На 70 кг Миши требуется $\frac{70}{10} \cdot 20 = 140$ мг вещества. В таблетках это $\frac{140}{10} = 14$ таблеток.

Ответ: 14.

№5

Уроки в школе начинаются в 8:30. Александру до школы идти 13 минут, одевается он за 7 минут, завтракает – за 15, а умывается и чистит зубы перед этим – за 7 минут. На сколько минут восьмого часа следует Александру завести будильник, чтобы всё успеть, если он хочет дополнительно оставить 10 минут на незапланированные дела? В ответе указать только минуты.

Решение.

Утренние процедуры у Саши занимают $13 + 7 + 15 + 7 = 42$ минуты. Соответственно, чтобы успеть в школу к первому уроку, ему надо вставать за 42 минуты до его начала. А если учитывать 10 минут на незапланированные дела, то за 52. Тогда будильник надо завести на 7:38.

Ответ: 38.

№6

Славе исполнилось 16 лет – и он с радостью устроился на лето на свою первую работу. Пройдя собеседование, с волнением и трепетом он вышел на свой первый день, где с таким же трепетом подписал договор. В договоре стояла знаковая сумма 25 000 рублей. Однако, в столь долгожданный день зарплаты сумма пришла заметно меньше – чему Слава не мог не удивиться. Пойдя разбираться в бухгалтерию, он узнал горькую истину: оказывается, есть налог на доход физических лиц, который вычитается из суммы, указанной в договоре, и составляет от неё 13%. «Вот так становятся взрослыми», - подумал Слава.

Сколько же денег пришло Славе в день зарплаты? Ответ выразите в рублях.

Решение.

Сумма, поступившая Славе, равняется $25\,000 * (100\% - 13\%) = 25\,000 * 0,87 = 21\,750$ руб.

Ответ: 21 750.

№7

Дмитрию исполнилось 16, и летом он смог наконец устроиться на свою первую полноценную работу. Его взяли в Сходню менеджером по продажам в компанию по изготовлению бытовой химии. В его обязанности входил обзвон других компаний с целью рассказа о предлагаемом товаре и привлечения клиентов. Его зарплата складывалась из фиксированной части и надбавки за каждого привлечённого клиента. Кроме того, в случае невыполнения своих обязанностей из зарплаты вычитались штрафы.

Фиксированная часть составляла 25 000 рублей. Надбавка за каждого клиента составляла 10% от фиксированной части, но не более 50% итога. Штрафы были: за опоздание на работу (500 рублей), за ранний уход с работы (500 рублей), за прокрастинацию и невыполнение своих обязанностей (1000 рублей).

В некоторый месяц Дима привёл в компанию 3 клиентов, трижды опоздал на работу, а один раз его поймали на том, что он играл в телефон вместо звонков. Какую сумму (до вычета налогов) начислят Дмитрию в конце месяца? Ответ приведите в рублях.

Решение.

Его зарплата была равна фиксированной части 25 000 рублей плюс премия за 3 клиентов ($30\% * 25\ 000 = 7\ 500$) минус 3 штрафа за опоздание ($3 * 500 = 1\ 500$) и штраф за игру в телефон (1000), суммарно – 30 000 рублей.

Ответ: 30 000.

Линейка задач № 2

№1

Путешественник решил отправиться в Китай. По опыту предыдущих поездок, он оценил, что для проживания и прочих расходов ему потребуется 6400 юаней - валюты Китая. Сколько рублей нужно будет обменять путешественнику, если 1000 юаней у него осталось с прошлого раза? В банке берут 13,4 рублей за 1 юань.

Решение:

Для решение этой задачи составим уравнение. Пусть путешественнику нужно обменять x рублей. Тогда, после обмена, он получит $\frac{x}{13,4}$ юаней. После этого вместе с 1000 юанями из предыдущих поездок путешественник будет располагать 6400 юанями. Уравнение будет выглядеть следующим образом:

$$\frac{x}{13,4} + 1000 = 6400$$

Решим данное уравнение:

$$\begin{aligned}\frac{x}{13,4} &= 5400 \\ x &= 5400 * 13,4 = 72360\end{aligned}$$

Значит, путешественнику потребуется поменять 72360 юаней.

Ответ: 72360.

№2

Для кота весом 5 кг предлагается два варианта питания: сухим кормом либо влажным. Суточная норма сухого корма для такого кота – 60 г; суточная норма влажного – 2 пакетика в день. Стоимость упаковки сухого корма весом 420 г – 431 рубль. Стоимость одной упаковки мокрого – 35 рублей. Какой вид корма будет выгоднее купить на неделю? В ответ укажите, сколько рублей удастся сэкономить по сравнению с другим видом корма.

Решение.

420 г = 7 дней * 60 г – то есть упаковки сухого корма хватит ровно на одну неделю.
Влажного корма потребуется по 2 пачки в день, то есть 14 штук. Тогда их стоимость: 14 шт * 35 руб = 490 руб. Получается, выгоднее будет кормить кота сухим кормом, а экономия составит 490 руб – 431 руб = 59 рублей.

Ответ: 59.

№3

В игре Subway Surf есть два параметра: пройденное расстояние и собранные монеты. Расстояние каждую секунду увеличивается на 1500 единиц, а игрок с постоянной скоростью собирает по 85 монет в минуту. Если игрок уже собрал 323 монеты, какое расстояние он преодолел в игре? Ответ выразите в тысячах, при необходимости округлив до целого.

Решение.

Количество монет $N = 85 \cdot t = 323$ монеты, где t в минутах. Находим из этого соотношения $t = \frac{323}{85} = 3,8$ минут. Переводим в секунды: $3,8 \text{ мин} = 3 \cdot 60 + 0,8 \cdot 60 = 180 + 45 = 228$ секунд. Найдем пройденное расстояние: $S = 1500 \cdot 228 = 342$ тыс.

Ответ: 342.**№4**

Маша отправилась в магазин за продуктами. Она хотела купить чай стоимостью 150 рублей, молоко стоимостью 100 рублей и шоколад стоимостью 80 рублей. Оказалось, что в магазине были скидки 15% на молоко и 10% на шоколад. Сколько рублей заплатила Маша? Учтеть, что после подсчета итоговой суммы копейки отбрасываются.

Решение.

С учётом скидки цена шоколада: $80 \cdot 0,9 = 72$ рубля; цена молока: $100 \cdot 0,85 = 85$ рублей. Тогда общая стоимость всех продуктов с учётом скидки – $72 + 150 + 85 = 307$ рублей.

Ответ: 307.**№5**

При жарке мясо уменьшается в весе в 1,25 раза. Чтобы наесться, одному человеку требуется 300 грамм шашлыка. Сколько килограммов мяса следует закупить на рынке, если есть шашлык будет 7 человек, считая повара?

Решение.

Готового продукта должно получиться $300 \cdot 7 = 2100$ г, то есть сырого должно быть $2100 \cdot 1,25 = 2625$ г, то есть 2,625 кг.

Ответ: 2,625.

№6.

Пиццерия готовит фирменную пиццу строго по заданному рецепту. Для приготовления одной пиццы требуется:

Тесто - 250 г.

Сыр - 150 г.

Колбаса - 100 г.

Помидор - 1 шт.

Кетчуп - 10 г.

Фирменный соус - 15 г.

В начале рабочего дня повара выяснили, что на складе остались продукты в следующем количестве:

Сыр - 2,45 кг.

Колбаса - 2,1 кг.

Помидоры - 17 штук.

Учитывая, что теста, кетчупа и соуса осталось с избытком, найдите максимальное количество фирменных пицц, которое сможет приготовить повар из имеющихся продуктов.

Решение:

Найдем, на сколько пицц хватит каждого из ингредиентов. Для этого поделим количество продуктов на складе на количество, требующееся для одной пиццы.

Сыр - $2450 \text{ г} / 150 \text{ г} = 16,3$ пиццы

Колбаса - $2100 \text{ г} / 100 \text{ г} = 21$ пицца

Помидор 17 штук / 1 штука = 17 пицц

Раз каждая пицца содержит все ингредиенты в строго заявленном объеме, значит, максимальное количество пицц определяется ингредиентами, которых хватит на минимальное число порций. В списке выше видно, что после 16-ой пиццы для 17-ой уже не хватит сыра.

Ответ: 16.**№7**

У Алёны был грустный день: приближался уже конец четверти, а у неё в журнале по математике не стояло ничего кроме троек. Алёна хотела во что бы то ни стало получить в этой четверти четвёрку: ведь тогда родители обещали купить ей новый телефон. Понимая, что без плана не обойтись, Алёна принялась считать. Если получать четвёрки велик риск не успеть, а потому Алёна решила целиться в пятёрки. Сколько пятёрок ей нужно получить, чтобы за четверть ей поставили 4? Сейчас у неё в журнале стоит 5 троек и больше ничего. Оценка за четверть вычисляется как средний балл, который округляется по правилам округления.

**ВЫХОДИ
РЕШАТЬ**

ВСЕРОССИЙСКАЯ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКАЯ
КОНТРОЛЬНАЯ

Решение.

Поскольку минимальный балл, который округлится до четвёрки – 3,5, необходимо, чтобы среднее от всех её оценок было не меньше 3,5.

Предельный случай для пятёрок:

$$\frac{5 * 3 + m * 5}{5 + m} = 3,5 \rightarrow 15 + 5m = 17,5 + 3,5m \rightarrow 1,5m = 2,5 \rightarrow m = \frac{5}{3},$$

то есть Алёне достаточно получить 2 пятёрки.

Ответ: 2.

Линейка задач № 3

№1

В новом ЖК “Колобково” построили квартиры с трёхметровыми потолками. В квартире-студии, в которой решил поселиться Константин, размер комнаты – 5х7 метров. Сколько рулонов обоев нужно купить Константину, чтобы поклеить ими все стены? Длина одного рулона – 18 метров, ширина – 1 метр. Константин хочет купить обоев с запасом, поэтому можно считать, что в комнате нет окон и дверей.

Решение.

Кусками по 3 метра нужно обклеить целую комнату. То есть одного рулона хватит на $\frac{18}{3} = 6$ таких кусков. Для всей комнаты потребуется $(5 + 7) * 2 = 24$ куска (ведь в ширину каждый кусок по метру). Значит закупить следует $\frac{24}{6} = 4$ рулона обоев.

Ответ: 4.

№2

На прямоугольном дачном участке размером 20х30 метров расположены: дом размером 3х6 метров, теплица размером 4х8 метров, санузел размером 3х1 метр и сарай размером 2х2 метра. На всём остальном участке хотят засадить газон. Какой площади будет поверхность земли, покрытая газоном?

Решение.

Общая площадь, покрытая газоном, будет вычисляться по формуле: общая площадь участка минус застроенная площадь. То есть $S = 600 - 18 - 32 - 3 - 4 = 543 \text{ м}^2$.

Ответ: 543.

№3

У бетонной лестницы на второй этаж два пролета по 10 ступеней на каждом. Хозяева дома хотят покрыть ковром лестницу так, чтобы каждая ступень была накрыта. Ширину ковра хозяева подобрали быстро. А какой длины должен быть ковер, чтобы покрыть все ступени, если каждая ступень 20 см в ширину и 10 см в высоту? Площадки между лестницами уже покрыты. Ответ укажите в метрах, при необходимости округлив до десятых. Хозяева не планируют нарезать ковёр отдельными частями под каждую ступень, а хотят использовать по одному цельному куску на каждый из пролётов.

Решение.

На одну ступень уходит $10 + 20 = 30$ см ковра. Всего ступеней $2 \cdot 10 = 20$. Получается всего по длине ковра нужно $20 * 30$ см. В одном метре 100 см, значит 600 см – это 6 м.

Ответ: 6.

№4

В пиццерии готовятся пиццы двух размеров: диаметром 30 см и 40 см. При этом пиццы получаются одинаковой толщины, но большая пицца разрезается на 8 кусков, а маленькая – на 6. По выходным проходит акция: к каждому заказу от 1200 рублей в подарок идет кусок пиццы “Маргарита”, причём размер куска может выбрать покупатель. Какой кусок выгоднее брать в подарок: маленькой пиццы или большой, если выгоднее кусок, превосходящий по площади? В ответ запишите отношение площадей меньшего куска к большему.

Решение.

Площадь куска пиццы 30 см – $\pi \cdot \frac{30^2}{6} = 150\pi$; куска 40 см – $\pi \cdot \frac{40^2}{8} = 200\pi$. Значит, выгоднее брать кусок пиццы 40 см и искомое отношение равняется $\frac{150\pi}{200\pi} = 0,75$.

Ответ: 0,75.

№5

Для проведения Чемпионата Мира по футболу в Москве готовится большое игровое поле. Оно будет готово после того, как его застелют газоном и раскрасят. Мировым футбольным сообществом принято соотношение сторон поля 1:1,55. Сколько квадратных метров газона следует купить, чтобы застелить поле, если после разминочного круга по краю поля часы спортсмена насчитали 357 пройденных метров?

Решение.

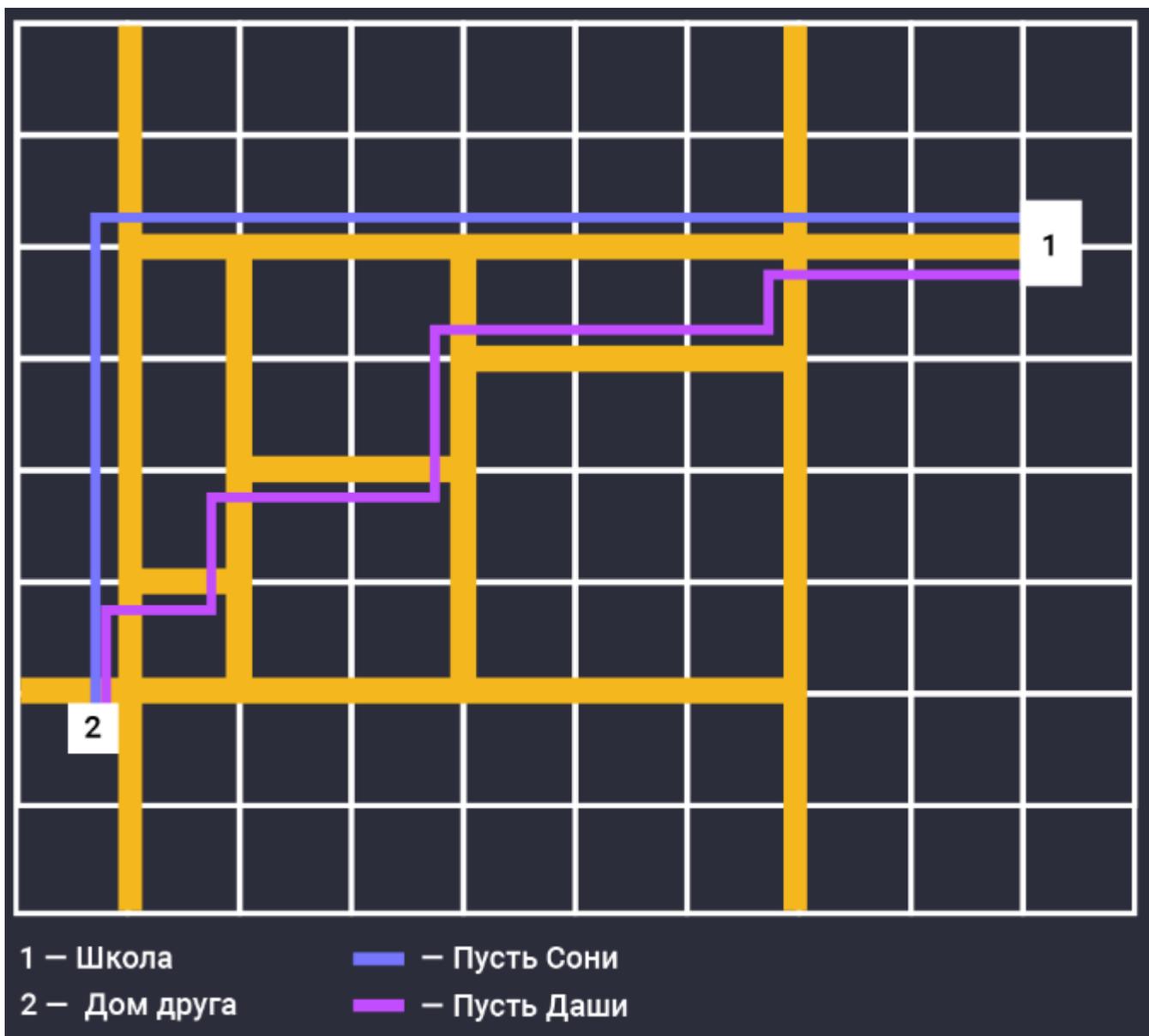
Предположим, что одна сторона поля равняется x м, тогда вторая сторона – $1,55x$. Пробежав по краю поля, спортсмен преодолел $P = (x + 1,55x) * 2 = 5,1x$ м. По условию, это расстояние равно 357 м.

Находим x : $x = \frac{357}{5,1} = 70$ м. Вторая сторона поля, соответственно, равна 108,5 метров. А значит, площадь газона: $S = 70 * 108,5 = 7\,595 \text{ м}^2$.

Ответ: 7 595.

№6

Соне и Даше нужно добраться из школы в гости к их другу. Школа расположена на конце длинного бульвара (цифра 1), дом друга – на пересечении двух улиц (цифра 2). Девушки решили посмотреть на карту, и у них возник спор, каким путём идти. Даша хотела пойти наиболее коротким путём: она предложила идти зигзагом по диагонали к дому друга. Соня же хотела побольше прогуляться по бульвару, а, кроме того, утверждала, что её путь ничем не длиннее Дашиного. В результате, каждая из них пошла своей дорогой. Считая, что девушки идут с одинаковой скоростью 5 км/ч, а одна клеточка соответствует 100 метрам, найдите, на сколько минут Даша придёт раньше Сони. Ответ округлите до целого. Расстоянием между точками начала пути Даши и Сони пренебречь.



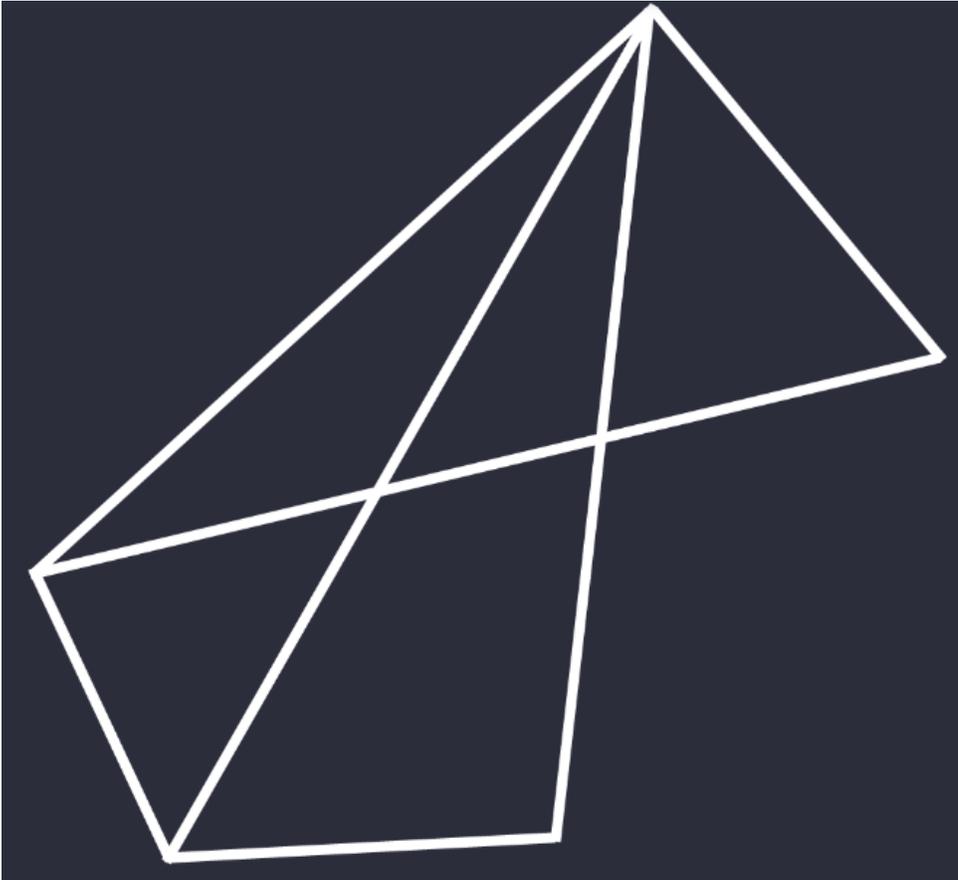
Решение.

Можно посчитать путь вручную по клеточкам, либо просто заметить, что движение подобным уголком никак не сокращает маршрут. То есть разница – 0 минут.

Ответ: 0.

№7

Гоша с детства не любил овал. Не любил он также круги, прямоугольники, треугольники, трапеции – словом, всю геометрию. Поэтому, когда в школе начали изучать этот предмет, а учитель вызвал Гошу к доске и попросил нарисовать 5 различных треугольников, Гоша нарисовал всего одну представленную на рисунке фигуру. Учитель сперва возмутился и хотел поставить Гоше двойку, но потом понял, что неправ, и нехотя похвалил Гошу и отправил на место. Сколько же треугольников на самом деле нарисовал Гоша?



Решение.

Всего на картинке 9 треугольников: 4 маленьких, 3 состоящих из двух треугольников, 1, состоящий из трёх, и 1 – состоящий из треугольника и четырёхугольника.

Ответ: 9.

Линейка задач № 4

№1

Когда манга “Истребитель демонов” ещё не была дописана, в интернете существовало много вариантов происхождения этого мира. Один из них заключался в том, что первым появился демон Мудзан Кибуцуджи. На следующий день он обратил еще трёх людей в демонов – трёх Высших Лун – и больше никого не обращал. Затем, на второй день (считая от превращения Мудзана) каждая Высшая Луна обратила ещё по три человека в демонов – трёх Низших Лун. И так далее. То есть каждый новообращённый демон обращал на следующий день своего существования ещё троих людей, тогда как предыдущие уже никого не обращали. Сколько в этом случае стало демонов на шестой день?

Решение.

В первый день был 1 демон – Мудзан, во второй день было $1 + 3 = 4$ демона – Мудзан и Высшие луны, на следующий день – $1 + 3 + 3 \cdot 3 = 13$. Получается, что количество демонов в день n измеряется формулой $S_n = 1 + 3 + \dots + 3^{n-1} = \frac{3^n - 1}{3 - 1} = \frac{3^n - 1}{2}$, что является суммой геометрической прогрессии с $b_1 = 1$, $q = 3$, где n – номер дня. Тогда на шестой день количество демонов $S_6 = \frac{3^6 - 1}{2} = \frac{27^2 - 1}{2} = \frac{729 - 1}{2} = 364$.

Ответ: 364.

№2

Антон очень любил зависать в VK Клипах, где пользователи снимают короткие вертикальные видео. Однажды он увидел очень смешной клип, который сразу же отправил двум своим друзьям. Клип оказался настолько хорош, что через 10 минут, когда друзья его посмотрели, каждый из них так же отправил его двум новым людям. Дальше каждые 10 минут ситуация повторялась: каждый из людей, кому приходил клип, пересылал его двум своим знакомым. Считая, что адресаты никогда не пересекались (т.е. никому не присылали клип дважды), найдите, сколько новых людей увидят клип через 1 час благодаря Антону. Самого Антона не считать.

Решение.

В 1 часе $\frac{60}{10} = 6$ десятиминут. Соответственно, в первые 10 минут появилось 2 новых просмотра, во вторые 10 минут – 4 новых просмотра, в третьи – 8 и так далее. Получаем, что за шестую десятиминутку видео увидят 2^6 человек. В сумме получаем $S_6 = 2 \cdot \frac{2^6 - 1}{2 - 1} = 126$ – сумма геометрической прогрессии с первым членом 2 и знаменателем 2.

Ответ: 126.

№3

На кондитерской фабрике рецепты всех тортов выверены годами с точностью до грамма каждого ингредиента. Все продукты отмеряются высокоточными весами, поэтому никаких потерь и перерасходов нет. Рецепт торта диаметром 18 см: 1150 г крема, 850 г бисквитного теста. Рецепт торта диаметром 16 см: 900 г крема, 600 г бисквитного теста. На вчерашней смене для тортов в грядущий день отмерили 7950 г крема и 5550 г теста, но не записали, сколько тортов какого вида планировалось приготовить. Сколько хотели сделать тортов диаметром 16 см из таких ингредиентов (ингредиенты не могут быть лишними)?

Решение.

Пусть тортов 18 см – x штук, а тортов 16 см – y штук. Тогда на крем будет затрачено $1150x + 900y$ грамм, а на тесто – $850x + 600y$ грамм. Получаем два уравнения:

$$\begin{aligned}1150x + 900y &= 7950; \\850x + 600y &= 5550.\end{aligned}$$

Полученная система уравнений имеет решение: $x=3$, $y=5$.

Ответ: 5.**№4**

В автоматической копилке с функцией подсчета количества опущенных в нее купюр Андрей решил собирать деньги на поезд от “Лего” стоимостью 3450 рублей. Когда он накопил эту сумму, счетчик копилки показывал 52 купюры. Сколько было купюр по 50 рублей, если Андрей клал туда только купюры номиналом 50 и 100 рублей?

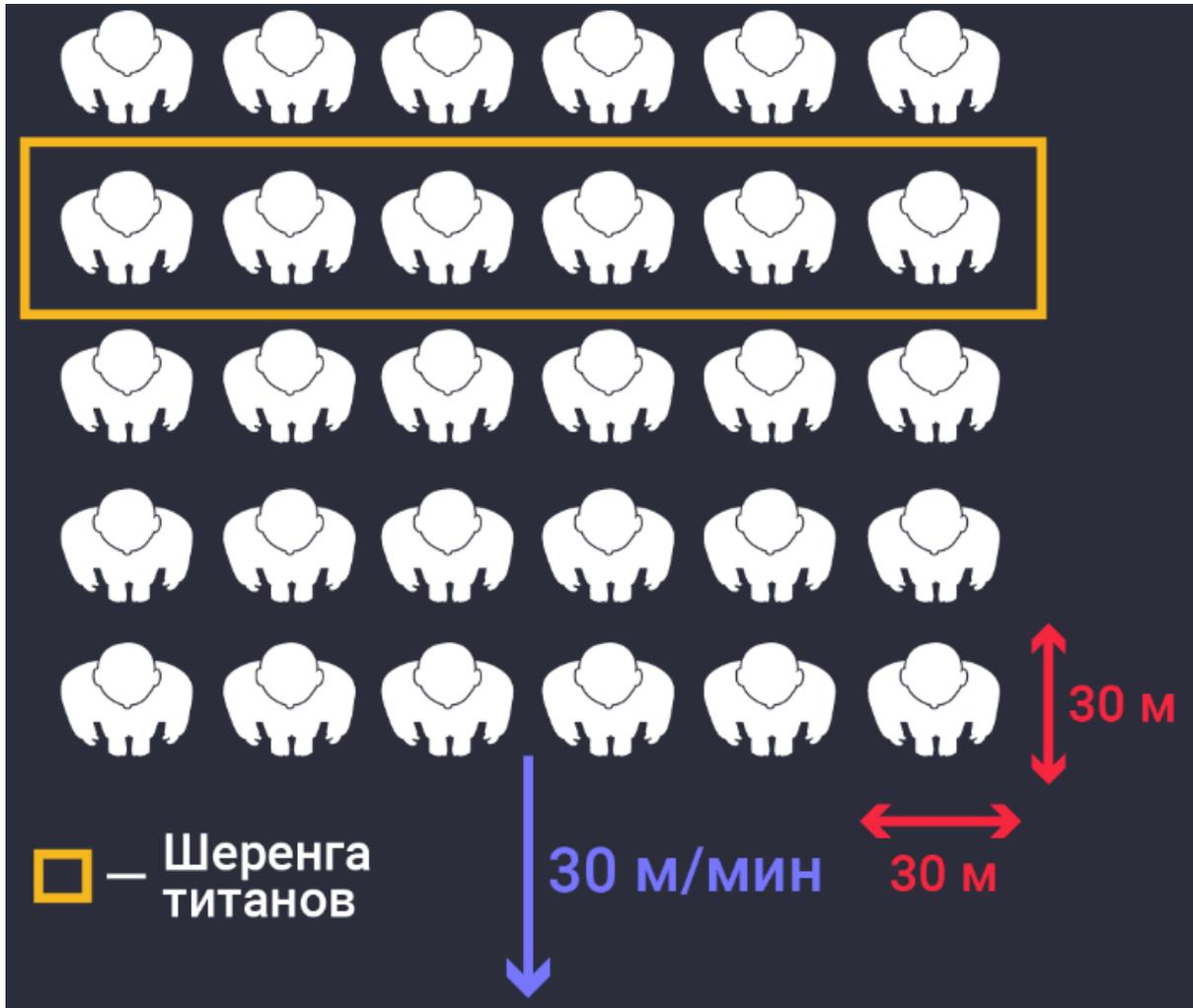
Решение.

Пусть x – количество пятидесятирублёвых купюр, y – сторублёвых. Тогда $x + y = 52$, а общая сумма: $50x + 100y = 3450$. Полученная система уравнений имеет решение при $x = 35$, $y = 17$.

Ответ: 35.

№5

Гул Земли, запущенный Эреном Егером в Атаке Титанов, представлял из себя длинную колонну из шеренг по 6 титанов, двигавшихся со скоростью 30 м/мин в сторону разведывательного корпуса. Когда между отрядом разведывательного корпуса и первой шеренгой оставалось совсем немного, командующая Ханжи решила принести себя в жертву, чтобы выиграть для корпуса ещё несколько минут. Сколько минут выиграла Ханжи, если она продержалась на поле боя ровно полторы минуты? Ханжи уничтожала по 4 титана за 10 секунд. Размеры титана, вид сверху: 30х30 метров.



Решение.

За 90 секунд Ханжи смогла уничтожить $\frac{90}{10} \cdot 4 = 36$ титанов. Так как по определению мы считаем, что действовала она оптимально, она рубила титанов равномерно, по шеренгам. Поэтому она смогла убрать первые $\frac{36}{6} = 6$ шеренг. Теперь посчитаем выигранное время: так как одна шеренга шириной 30 метров, а движутся титаны со скоростью 30 м/мин, то уничтожение одной такой шеренги дает выигрыш развед корпусу в 1 минуту. Соответственно, жертва Ханжи дала отряду дополнительные 6 минут.

Ответ: 6.

№6

Для того чтобы исполнить одно своё желание, нужно вырвать один волос из бороды Хоттабыча. Когда Волька подружился с Хоттабычем, второй разрешил загадывать неограниченное количество желаний. Первую неделю Волька скромничал и загадывал по одному желанию в день. На второй он осмелел и стал загадывать на 2 желания в день больше, чем на первой неделе. С каждой новой неделей Волька становился смелее и увеличивал количество желаний в день ещё на 2 по сравнению с предыдущей неделей. Под конец шестой недели Хоттабыч посчитал волосы на бороде. И оказалось, что она поредела на 5%. Сколько волос было на бороде старика до встречи с Волькой?

Решение.

Для начала посчитаем, сколько желаний всего загадал Волька. На первой неделе он загадал $a_1 = 7$, на каждой следующей неделе на $d = 2 * 7 = 14$ желаний больше. Получается, что за 6 недель он вырвал $S_6 = \frac{a_1 + a_1 + 5d}{2} \cdot 6 = \frac{14 + 5 \cdot 14}{2} \cdot 6 = 252$ волоса. Теперь посчитаем, сколько волос было изначально: если 5% это 252 волоса, то 100% это $\frac{100}{5} \cdot 252 = 5040$ волос.

Ответ: 5040.

№7

Антон всегда хотел доказать своё превосходство над искусственным интеллектом. Поэтому, когда у него появилась умная колонка от VK с голосовым помощником Марусей, он тотчас же решил попробовать поймать её на математических ошибках. Сперва он задал легендарный вопрос «сколько будет два плюс два умножить на два». Получив верный ответ, он не сдался и придумал: «А сколько будет:

1. Два плюс два умножить на два,
2. Плюс только что полученное, умноженное на два,
3. Плюс только что полученное, умноженное на два,
4. Плюс только что полученное, умноженное на два,
5. Плюс только что полученное, умноженное на два?»

Не прошло и нескольких секунд, как Маруся выдала ответ, тогда как Антон принялся с ручкой и листиком усердно считать результат. Как итог, разочарованный, он признал, что Маруся была права. Какой ответ у неё получился?

Решение.

У задачи есть две трактовки.

Первая – что задание Антона – ни что иное, как подсчёт суммы геометрической прогрессии. На первом шаге он задал первый элемент, равный $a_1 = 2 + 2 * 2 = 6$. Далее каждый следующий элемент был равен удвоенному предыдущему, то есть $a_n = a_{n-1} * 2$, $n > 1$, а общее количество членов равнялось 5. Поскольку $a_n = q^{n-1} a_1$, то $a_5 = 2^4 * 6 = 96$ и $S_5 = a_1 \frac{q^5 - 1}{q - 1} = 6 * \frac{2^5 - 1}{2 - 1} = 186$.

Вторая трактовка подразумевает, что на каждом шаге мы брали всю сумму, получившуюся на текущий момент. Тогда получаем следующие значения:

На первом шаге $- 2 + 2 * 2 = 6$

На втором $- 6 + 6 * 2 = 18$

То есть при $n \geq 2$ получаем $S_n = S_{n-1} + 2 * S_{n-1} = 3S_{n-1}$. Тогда $S_5 = 3^4 * S_1 = 486$.

Ответ: 186 или 486.

Линейка задач № 5

№1

Миша собирает и продаёт корни женьшеня. Его распорядок дня выглядит следующим образом: Миша встает к полуночи и идёт собирать корни. Затем в какой-то момент времени он заканчивает сбор и идёт на рынок, где за пару минут продаёт все собранные корни, и идёт отдыхать. Собирает Миша корни с постоянной скоростью – 4 корня за три часа (за один час он соберёт 1 корень, за два – 2 корня). Приходя на рынок в разное время, он заметил, что спрос на корни зависит от времени по формуле:

$k(t)=26t-t^2-120$ (где k – максимальное количество возможных продаж, t – время в часах, $5 < t < 20$).

Во сколько часов Мише стоит приходить на рынок, чтобы продать всё, что он насобирал, и при этом получить наибольшую выгоду? В ответе напишите число, округленное до целого. Если в момент, когда Миша пришёл на рынок, не удаётся продать все корни (спрос меньше, чем у него корней), остаток он выбрасывает и уходит.

Решение.

Миша собирает корни весь день с постоянной скоростью 4 корня за 3 часа, значит скорость сбора описывается формулой:

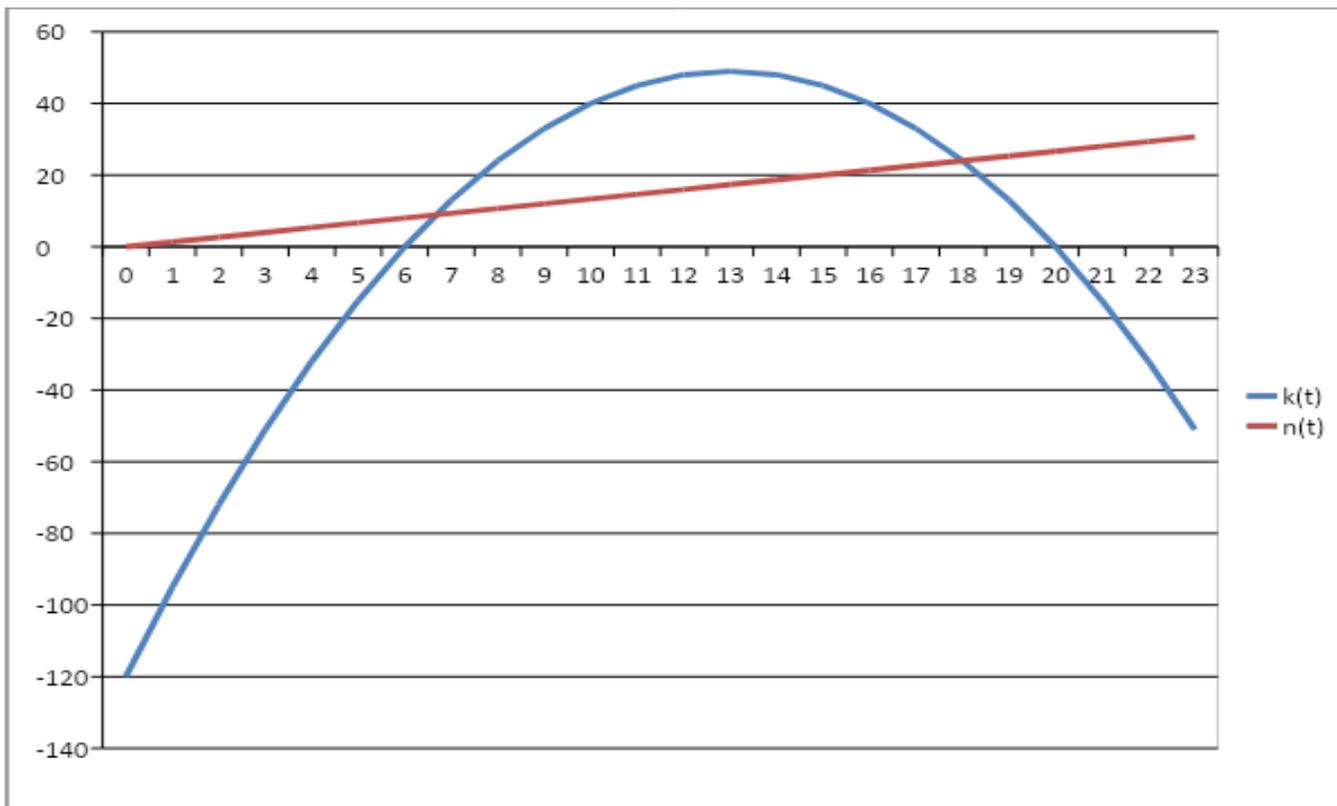
$$n(t) = \frac{4}{3}t, \text{ где } t - \text{ время, } n - \text{ количество собранных корней.}$$

Чтобы продать все собранные корни, необходимо, чтобы спрос был не меньше количество собранного, при этом количество собранных корней должно быть максимально возможным. Таким образом, нам нужно, чтобы:

1. Спрос на корни k должен быть не меньше кол-ва собранных корней n , т.е. $k(t) \geq n(t)$.
2. Количество собранных корней $n(t)$ максимально.

Далее задачу можно решить графически. Как видно из графиков, данные условия выполнены, когда $n(t) = k(t)$ и выбран больший из двух корней данного уравнения.

Таким образом, нужно решить уравнение $26t - t^2 - 120 = \frac{3t}{4}$. Подходящий по условию корень этого уравнения – 18.



Ответ: 18.

№2

Компания друзей решила организовать бизнес по продаже маек под собственным брендом. Ребята узнали, что производство одной майки будет стоить 300 рублей. Оценив ситуацию на рынке, они поняли, что люди охотнее покупают дешёвые майки, а дорогие пользуются меньшим спросом. Однако, при продаже дешёвых маек сложнее заработать: прибыль с одной проданной майки меньше. Изучив информацию в интернете и опросив знакомых продавцов, ребята предположили, что количество продаваемых маек будет зависеть от цены одной майки по линейному закону:

$K = 15\,000 - 6C$, где K – количество проданных за месяц маек, C – цена одной майки.

Какую цену стоит установить за одну майку, чтобы заработать максимальное количество денег за месяц?

Решение.

Прибыль с продажи одной майки равняется её стоимости за вычетом стоимости её производства. Тогда общая прибыль – прибыль с одной майки умножить на кол-во проданных маек, то есть:

$$(C - 300)(15\,000 - 6C) = -6C^2 + 16\,800C - 4\,500\,000$$

Чтобы найти максимум этого выражения, выделим полный квадрат:

$$\begin{aligned} -6Ц^2 + 16\,800Ц - 4\,500\,000 &= -6(Ц^2 - 2\,800Ц + 750\,000) = \\ &= -6(Ц^2 - 2\,800Ц + 1\,960\,000 - 1\,960\,000 + 750\,000) = -6((Ц - 1\,400)^2 - 1\,210\,000) \\ &= 7\,260\,000 - 6(Ц - 1\,400)^2 \end{aligned}$$

Это выражение имеет максимум при $Ц - 1\,400 = 0$, то есть $Ц = 1\,400$.

Ответ: 1 400 рублей

№3

Артём решил поехать домой на самокате. Он открыл приложение, и оказалось, что рядом с ним находится только один самокат – Артём забронировал его и начал искать. Он увидел, что самокат не просто стоит на парковке, но прикован железным замком к забору. А на замке были трёхзначный код и записка: «Чтобы разблокировать замок, вам понадобится подсказка: цифры больше 5 не используются в коде, а также сумма соседних цифр не равна пяти. Удачи!» Артём решил, что ничего не остаётся, кроме как попытаться подобрать код. Он оценил, что на ввод одного варианта ему потребуется 10 секунд. Сколько потребуется минут, чтобы гарантированно открыть замок? Считайте, что Артём крайне невезуч и угадать код сможет только с последней попытки.

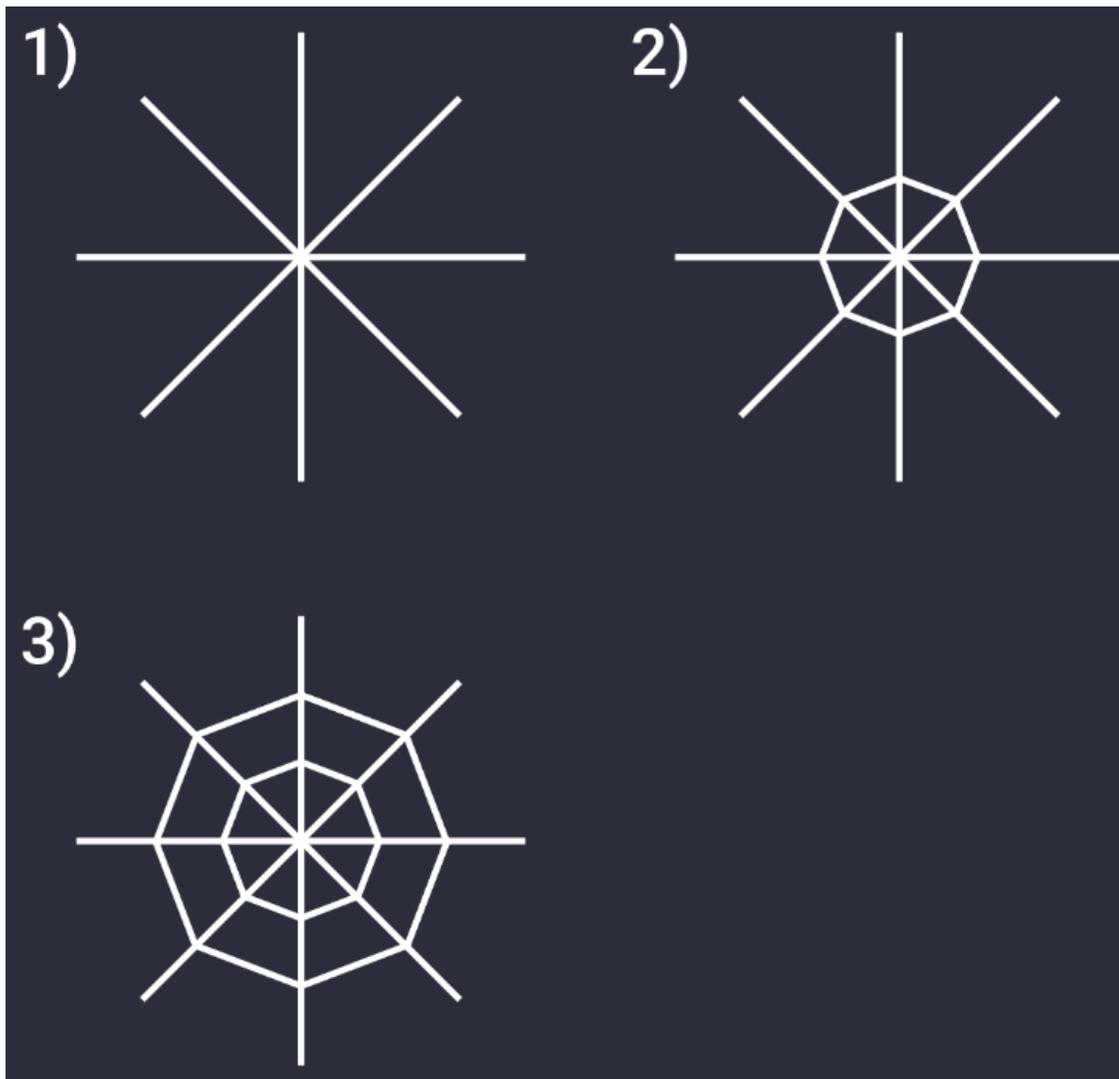
Решение.

Пары цифр, которые не могут стоять рядом: 0 и 5, 1 и 4, 2 и 3, 3 и 2, 4 и 1, 5 и 0. Подсчитаем количество возможных вариантов кодового замка. На место первой цифры можно подставить любую из этих шести (на первую цифру нет ограничений, кроме того, что она должна быть меньше 6). Так как первая цифра уже определена, то на место второй цифры подходит не любая из шести цифр, а только пять из них (если на первом месте стоит цифра 5, то на втором может быть 1,2,3,4 или 5; если на первом месте 4, то на втором может быть 0,2,3,4 или 5 и т.д.). На третье место, аналогично второму, пять возможных вариантов. Тогда общее количество вариантов $6 * 5 * 5 = 150$. Теперь определим затраченное время: каждую минуту Артем проверяет $\frac{60}{10} = 6$ вариантов. Значит, общее затраченное время: $\frac{150}{6} = 25$ минут.

Ответ: 25.

№4

Паук плетет паутину в саду. Техника его плетения такова, что сначала он плетет каркас из четырех пересекающихся длинных нитей, а затем плетет восьмиугольники (см. рис). Известно, что длина нити, требующаяся на каждый следующий восьмиугольник, увеличивается на 1.5 сантиметра. Из скольких рядов получилась сплетённая паутина, если общая длина нити, выпущенной пауком, равна 417 см? Нити, служащие каркасом паутины, имеют длину 32 см каждая, а периметр первого восьмиугольника равен 5 см.



Решение.

Периметр каждого восьмиугольника увеличивается на одно и то же число относительно периметра предыдущего. Следовательно, их периметры образуют арифметическую прогрессию, где $a_1 = 5$, $d = 1,5$.

Общая длина выпущенной нити: $l = S_n + 4 \cdot 32 = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n + 128 = 417$. Подставляя числа, получаем уравнение:

$$\frac{10 + 1,5(n - 1)}{2} \cdot n = 289.$$

Преобразовываем:

$$1,5n^2 + 8,5n - 161 = 0, D = 59,5^2$$

Это квадратное уравнение с единственным положительным корнем

$$n = \frac{-8,5 + 59,5}{3} = 17 \text{ (рядов)}.$$

Ответ: 17.

№5

Говорят, чтобы пробежать марафон на "День бега", нужно тренироваться бегать каждый день, ежедневно увеличивая преодолённую дистанцию на 100 метров. Аня решила подготовиться к такому марафону и начала заниматься. В первый день она пробежала 6 км. Какой длины дистанция этого марафона, если к моменту, когда Аня дошла до нужной дистанции, всего она пробежала за время тренировок 549 км?

Решение.

Каждый день Аня пробегает на 100 м больше, чем в предыдущий. Значит, длины ежедневных забегов образуют между собой арифметическую прогрессию, в которой $a_1 = 6$ км, $d = 0,1$ км. Тогда общая пройденная дистанция Ани $S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n = \frac{11,9 + 0,1n}{2} \cdot n = 549$ км. Преобразуем последнее равенство и получим квадратное уравнение:

$$0,1n^2 + 11,9n - 1098 = 0$$
$$D = 11,9^2 + 4 \cdot 0,1 \cdot 1098 = 24,1^2$$

Единственным положительным корнем уравнения будет $n = 61$, что означает, что тренировки шли 61 день.

Тогда длина четверть марафонского забега: $l = a_{61} = 6 + 0,1 \cdot (61 - 1) = 12$ км.

Ответ: 12.

№6

Вера очень любила мастерить куклы и мягкие игрушки и решила открыть собственный онлайн-магазинчик рукоделия. Для того, чтобы находить клиентов, она решила создать сообщество ВКонтакте, заполнив его постами о своих работах. А затем эти посты она начала продвигать через таргетированную рекламу. У рекламы есть два основных способа оплаты: оплата за количество показов и оплата за количество переходов. То есть в первом случае Лера выставляет, какую сумму она готова заплатить за 1000 показов рекламы людям, при этом количество переходов на страницу её сообщества может быть любое. Во втором – какую сумму она готова заплатить за один переход, при этом количество показов неограниченно.

Оказалось, что при оплате за переход за день к ней переходит:

$N_1 = S / 10$ человек, где S – цена за один переход в рублях.

При этом при оплате за 1000 просмотров при небольших суммах за день к ней переходит:

$N_2 = 0,25P - 0,00025P^2$, P – цена за 1000 просмотров в рублях.

Какое максимальное количество переходов может получить Вера за день на 500 рублей? В случае нецелого ответа округлять вниз.

Решение.

Пусть Вера отдала за рекламу с оплатой за 1000 просмотров P рублей. Тогда за оплату переходов она отдала $S = 500 - P$ рублей (поскольку всего у неё 500 рублей). Нас интересует, какой максимум мы можем получить для общего количества переходов, т.е. для $N = N_{\text{просм}} + N_{\text{пер}} = 0,25P - 0,00025P^2 + \frac{S}{10} =$

$$= 0,25P - 0,00025P^2 + \frac{500 - P}{10} = 50 + 0,15P - 0,00025P^2$$

Чтобы найти максимум этого выражения, выделим полный квадрат:

$$\begin{aligned} 50 + 0,15P_{\text{просм}} - 0,00025P^2 &= 50 - 0,1 * (0,0025P^2 - 1,5P) = \\ &= 50 - 0,1 * (P^2 - 2 * 0,05P * 15 + 225 - 225) = \\ &= 50 - 0,1 * (0,05P - 15)^2 + 22,5 = 72,5 - 0,1 * (0,05P - 15)^2 \end{aligned}$$

Это выражение имеет максимум при $0,05P - 15 = 0$, то есть при $P = 300$ рублей. Тогда количество переходов равняется $0,25 * 300 - 0,00025 * 300^2 + \frac{500-300}{10} = 72$ перехода.

Ответ: 72.

№7

Лиза никак не могла понять, кем она является: интровертом или экстравертом. Стоило ей оказаться в одиночестве, как она начинала уже скучать по людям и хотеть много общения. Однако, оказываясь в большой компании, она вскоре уставала и хотела скорее побыть одна. От этого страдала не только она, но и её друзья, с которыми она часто отменяла встречи.

Однажды её друг-математик Миша решил исследовать зависимость её тяги к людям от количества людей, с которыми Лиза общалась в последнее время. Для этого он ввёл вероятностную величину ψ , $0 \leq \psi \leq 1$, обозначающую вероятность следующей встречи с ним. $\psi=1$ значило, что встреча точно состоится (шанс встречи 100%), а $\psi=0$ – что точно отменится (шанс встречи 0%). Кроме того, он заметил, что если в некоторый день Лиза встретила с n людьми, то величина ψ уменьшалась на $0,04n^2$. С другой стороны, если Лиза ни с кем не встречалась в течение m дней подряд, значение ψ возрастало на $0,08m^2 - 0,02m$, достигая, максимум, единицы.

В некоторый день (сегодня) у Лизы был корпоратив, что Миша справедливо принял за $\psi_i=0$. Затем Миша узнал у Лизы планы на ближайшую неделю: оказалось, что послезавтра Лиза встречается с другом, а затем в ближайшее время не планирует ни с кем встречаться. Через сколько дней Мише стоит назначить встречу, чтобы её вероятность была не меньше 80%? Вероятность встречи в назначенный день рассчитывается на основании значения ψ на конец предыдущего дня. То есть, если сегодня после всех встреч Лизы $\psi=0,5$, на завтрашнюю встречу она придёт с вероятностью 50%.

Примечание: через 1 день = послезавтра.

Решение.

Мы знаем, что $\psi_1 = 0$. Во второй день Лиза не встретила ни с кем, что значит, что $\psi_2 = \psi_1 + 0,08 * 1^2 - 0,02 * 1 = 0,06$. Однако, на третий день она вновь встретила с 1 человеком – то есть $\psi_3 = \psi_2 - 0,04 * 1^2 = 0,02$. Дальше она не встречалась ни с кем, т.е. все дни подряд у неё пустуют, а значит $\psi_{3+m} = 0,02 + 0,08m^2 - 0,02m$. Нам необходимо, чтобы эта величина была не меньше 0,8. Тогда решим уравнение для крайнего случая:

$$0,02 + 0,08m^2 - 0,02m = 0,8$$

$$0,08m^2 - 0,02m - 0,78 = 0$$

$$8m^2 - 2m - 78 = 0$$

$$D = 2^2 + 4 * 8 * 78 = 2500$$

$$\text{Единственный положительный корень } m = \frac{2 + \sqrt{2500}}{2 * 8} = 3,25$$

Значит, минимальное $m = 4$, что соответствует дню под номером $3 + m = 3 + 4 = 7$. А значит, Мише нужно позвать Лизу встретиться через $7 - 1 = 6$ дней.

Ответ: 6.