Автор условий и разборов: Алексей Мерзляков

Ответы и решения – Информатика
Задача 1

Задача 1.1. (Баги). Антон только учится программировать, поэтому часто допускает ошибки в своем коде. Так как Антон развивается, в своих программах он допускает ошибки все реже. Сегодня Антон решил написать программу и ошибся сперва в первой строчке, затем во второй, потом в четвертой, затем в восьмой и так далее по степеням двойки. Всего он написал 130 строчек кода. В скольких строчках кода Антон ошибся?

Ответ. 8
Решение. Запишем номера строчек кода, в которых ошибся Антон, и которые не превосходят 130: 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128. Всего получилось 8 строк.

Задача 1.1+. (Баги). Антон только учится программировать, поэтому часто допускает ошибки в своем коде. Так как Антон развивается, в своих программах он допускает ошибки все реже. Сегодня Антон решил написать программу и ошибся сперва в первой строчке, затем во третьей, потом в девятой, затем в двадцать седьмой и так далее по степеням тройки. Всего он написал 130 строчек кода. В скольких строчках кода Антон ошибся?

Ответ. 5
Решение. Запишем номера строчек кода, в которых ошибся Антон, и которые не превосходят 130: 1, 3, 9, 27, 81. Всего получилось 5 строк.

Задача 1.2 (Скоро встретимся). В некотором игровом мире есть ряд пронумерованных столбиков. На первом столбике сидят лягушка и кузнечик. Лягушка умеет прыгать только через два столбика за один прыжок, а кузнечик – только через четыре. Таким образом, за один прыжок с первого столбика лягушка может прыгнуть на четвертый, а кузнечик – на шестой столбики. Лягушка и кузнечик начали скакать вперед по ряду столбиков. Определите номер ближайшего столбика, на котором лягушка и кузнечик смогут встретиться вновь.
Ответ. 16
Решение. Задачу можно решить простым моделированием, выписав подряд все номера столбиков и отмечая, по каким столбикам проскакала лягушка, а по каким кузнечик. Лягушка скачет по столбикам 1, 4, 7, 10, 13, 16 и т.д., а кузнечик скачет по столбикам 1, 6, 11, 16 и т.д. Ближайший столбик, на который запрыгнут они оба, имеет номер 16.

Задача 1.2+ (Скоро встретимся). В некотором игровом мире есть ряд пронумерованных столбиков. На первом столбике сидят лягушка и кузнечик. Лягушка умеет прыгать только через три столбика за один прыжок, а кузнечик – только через пять. Таким образом, за один прыжок с первого столбика лягушка может прыгнуть на пятый, а кузнечик – на седьмой столбики. Лягушка и кузнечик начали скакать вперед по ряду столбиков. Определите номер ближайшего столбика, на котором лягушка и кузнечик смогут встретиться вновь.
Ответ. 13

Автор условий и разборов: Алексей Мерзляков

Решение. Задачу можно решить простым моделированием, выписав подряд все номера столбиков и отмечая, по каким столбикам проскакала лягушка, а по каким кузнечик. Лягушка скачет по столбикам 1, 5, 9, 13, 17, 21 и т.д., а кузнечик скачет по столбикам 1, 7, 13, 19 и т.д. Ближайший столбик, на который запрыгнут они оба, имеет номер 13.

Задача 1.3 (Браслетики). Андрей Сергеевич организует олимпиаду по информатике. Он является организатором и членом жюри одновременно. На мероприятии организаторы носят красные браслеты, а члены жюри – зеленые. Андрей Сергеевич зашел в подсобное помещение, чтобы взять свои браслеты, но там не работало освещение, и различить цвета оказалось невозможно. Он точно помнит, что там должно быть 9 браслетов красного цвета и 17 браслетов зеленого цвета. Какое минимальное количество браслетов ему нужно взять с собой, чтобы заведомо иметь на руке два браслета разных цветов?

Ответ. 18
Решение. Если взять любое количество браслетов, меньшее 18, то существует исход, при котором Андрей Сергеевич возьмет браслеты только одного цвета. Потому он должен взять 18 браслетов.

Задача 1.3+ (Браслетики). Андрей Сергеевич организует олимпиаду по информатике. Он является организатором и членом жюри одновременно. На мероприятии организаторы носят красные браслеты, а члены жюри – зеленые. Андрей Сергеевич зашел в подсобное помещение, чтобы взять свои браслеты, но там не работало освещение, и различить цвета оказалось невозможно. Он точно помнит, что там должно быть 19 браслетов красного цвета и 7 браслетов зеленого цвета. Какое минимальное количество браслетов ему нужно взять с собой, чтобы заведомо иметь на руке два браслета разных цветов?

Ответ. 20
Решение. Если взять любое количество браслетов, меньшее 20, то существует исход, при котором Андрей Сергеевич возьмет браслеты только одного цвета. Потому он должен взять 20 браслетов.

Задача 1.4 (Спорт – это важно). Петя и Вася часто занимаются спортом. Они отжимаются по очереди, в несколько подходов. Васе важно во всем превосходить Петю, потому Вася в каждом подходе отжимается ровно на 1 раз больше Пети. Например, если Петя отжался 5 раз, то Вася отожмется 6 раз в этом подходе.

Всего за 5 подходов Петя отжался 32 раза. Сколько раз за эти 5 подходов отжался Вася?

Ответ. 37
Решение. Если в каждом подходе Вася отжимался на 1 раз больше, то за 5 подходов он отжался на 5 раз больше Пети. Значит, Вася отжался 32 + 5 = 37 раз.

Автор условий и разборов: Алексей Мерзляков

Задача 1.4+ (Спорт – это важно). Петя и Вася часто занимаются спортом. Они отжимаются по очереди, в несколько подходов. Васе важно во всем превосходить Петю, потому Вася в каждом подходе отжимается ровно на 1 раз больше Пети. Например, если Петя отжался 5 раз, то Вася отожмется 6 раз в этом подходе.

Всего за 5 подходов Вася отжался 32 раза. Сколько раз за эти 5 подходов отжался Петя?

Ответ. 27
Решение. Если в каждом подходе Вася отжимался на 1 раз больше, то за 5 подходов он отжался на 5 раз больше Пети. Значит, Петя отжался 32 - 5 = 27 раз.

Задача 1.5 (Магазин электроники) У Феди есть три друга, которые посетили только что открывшийся магазин компьютерной техники. Первый друг сказал, что в магазине было всего 30 клавиатур и мышей. Второй друг сказал, что в магазине было суммарно 27 мышей и мониторов. Третий друг сказал, что в магазине было 20 мышей. Феде интересно, сколько суммарно в новом магазине мышей, клавиатур и мониторов? Помогите ему узнать ответ.

Ответ. 37
Решение. Сложим сведения первых двух друзей 30+27=57. Заметим, что при этом мыши были учтены дважды, потому ответ 57-20 = 37 единиц техники.

Задача 1.5+ (Магазин электроники) У Феди есть три друга, которые посетили только что открывшийся магазин компьютерной техники. Первый друг сказал, что в магазине было всего 30 клавиатур и мониторов. Второй друг сказал, что в магазине было суммарно 27 мышей и клавиатур. Третий друг сказал, что в магазине было 20 мышей. Феде интересно, сколько суммарно в новом магазине мышей, клавиатур и мониторов? Помогите ему узнать ответ.

Ответ. 50.
Решение. Сложим сведения первого и третьего друзей 30+20=50.

Автор условий и разборов: Алексей Мерзляков

ВЫХОДИ РЕШАТЬ!
ВСЕРОССИЙСКАЯ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКАЯ КОНТРОЛЬНАЯ

Задача 2

Задача 2.1 (Очень грустный преподаватель). На перемене учитель информатики готовился к уроку и написал на доске 47 чисел, после чего вышел из кабинета. А на урок собирался прийти очень веселый класс. Сперва на перемене в кабинет зашел веселый Тимофей и стер каждое второе число. После действий Тимофея в кабинет зашел веселый Артем и стер каждое третье число среди тех чисел, которые он увидел. Найдите количество чисел, которые остались на доске после шалостей Тимофея и Артема.

Ответ. 16

Решение. Тимофей, стирая каждое второе число, стер всего $\lfloor\frac{47}{2}\rfloor = 23$ числа. Значит, на доске осталось $47 - 23 = 24$ числа. Затем, стирая каждое третье число, Артем стер $\lfloor\frac{24}{3}\rfloor = 8$ чисел. На доске осталось $24 - 8 = 16$ чисел.

Пояснение: операция $[x]$ *берёт целую часть от числа x, то есть* $[5{,}4] = [5{,}99] = 5$.

Задача 2.1+ (Очень грустный преподаватель). На перемене учитель информатики готовился к уроку и написал на доске 47 чисел, после чего вышел из кабинета. А на урок собирался прийти очень веселый класс. Сперва на перемене в кабинет зашел веселый Тимофей и стер каждое третье число. После действий Тимофея в кабинет зашел веселый Артем и стер каждое третье число среди тех чисел, которые он увидел. Найдите количество чисел, которые остались на доске после шалостей Тимофея и Артема.

Ответ. 22.

Решение. Тимофей, стирая каждое третье число, стер всего $\lfloor\frac{47}{3}\rfloor = 15$ чисел. Значит, на доске осталось $47 - 15 = 32$ числа. Затем, стирая каждое третье число, Артем стер $\lfloor\frac{32}{3}\rfloor = 10$ чисел. На доске осталось $32 - 10 = 22$ числа.

Пояснение: операция $[x]$ *берёт целую часть от числа x, то есть* $[5{,}4] = [5{,}99] = 5$.

Задача 2.2 (Ложиться спать нужно вовремя). Антон писал программу всю ночь прямо перед дедлайном. К утру он обнаружил, что у него на столе стоят три кружки недопитого кофе с ложечками. Чувствуя сильное недосыпание, Антон заинтересовался, сколько есть способов разложить три одинаковых ложечки по трем разным чашкам. Например, вариант, когда две ложечки в первой кружке, и одна ложечка – во второй, отличается от варианта, где две ложечки лежат в первой кружке и одна ложечка – в третьей.
Помогите Антону найти ответ на интересующий его вопрос.

Ответ. 10

Решение. Переберем все варианты расположения ложечек, записав количества в каждой из чашечек. Есть 3 варианта, когда все ложечки лежат в одной из чашек. Добавим 6 вариантов, когда две ложечки лежат в одной из чашек: 201, 210, 120, 021, 102, 012. И есть единственный вариант, когда в каждой чашке лежит по ложечке. Всего 10 вариантов.

Задача 2.2+ (Ложиться спать нужно вовремя). Антон писал программу всю ночь прямо перед дедлайном. К утру он обнаружил, что у него на столе стоят три кружки недопитого кофе, две из которых - с ложечками. Чувствуя сильное недосыпание, Антон заинтересовался, сколько есть способов разложить две одинаковых ложечки по трем разным чашкам. Например, вариант, когда одна ложечка лежит в первой кружке и одна ложечка – во второй, отличается от варианта, где одна ложечка лежит в первой кружке и одна ложечка – в третьей.
Помогите Антону найти ответ на интересующий его вопрос.

Ответ. 6
Решение. Переберем все варианты расположения ложечек, записав количества в каждой из чашечек. Есть 3 варианта, когда все ложечки лежат в одной из чашек. Добавим 3 варианта, когда ложечки лежат в разных чашках: 101, 110, 011. Всего 6 вариантов.

Задача 2.3 (Рукопожатия). Во время важного совещания четверо айтишников робко переглянулись, каждый с каждым. Сколько всего зрительных контактов произошло?

Ответ. 6
Решение. Пронумеруем сотрудников от 1 до 4 и выпишем различные зрительные контакты, перебирая сотрудников по одному и учитывая, какие контакты уже выписаны. Первый сотрудник переглянулся трижды: с 2, 3 и 4. Второй – ещё дважды с 3 и 4. Третий переглянулся один раз с 4. Всего 6 зрительных контактов.

Задача 2.3+ (Рукопожатия). Во время важного совещания пятеро айтишников робко переглянулись, каждый с каждым. Сколько всего зрительных контактов произошло?

Ответ. 10
Решение. Пронумеруем сотрудников от 1 до 5 и выпишем различные зрительные контакты, перебирая сотрудников по одному и учитывая, какие контакты уже выписаны. Первый сотрудник переглянулся четырежды: с 2, 3, 4 и 5. Второй – ещё трижды с 3, 4 и 5. Третий переглянулся два раза: с 4 и 5. Пятый переглянулся только с 4. Всего 10 зрительных контактов.

Задача 2.4 (Информаты с кофе неразлучны) Начинающий программист Вова пишет до 60 строчек кода в день. Если Вова выпивает кофе, то в этот день он пишет до 120 строчек. Вова недавно подписался на блог о здоровье и решил, что будет пить кофе максимум раз в два дня. То есть, если Вова решает выпить кофе в один день, то на следующий день он пить кофе не будет. Определите, какое минимальное количество дней потребуется Вове, чтобы написать проект, состоящий из 654 строчек кода? Вова может выпить кофе в первый же день работы над проектом.

Ответ. 7

Решение. Вове выгодно пить кофе через день, начиная с первого дня. Можно просто начать моделировать процесс и считать дни в виде $120 + 60 + 120 + 60 + \cdots$, пока сумма не превысит 654. Получается, что нужно 7 дней.

Задача 2.4+ (Информаты с кофе неразлучны) Начинающий программист Вова пишет до 60 строчек кода в день. Если Вова выпивает кофе, то в этот день он пишет до 120 строчек. Вова недавно подписался на блог о здоровье и решил, что будет пить кофе максимум раз в три дня. То есть, если Вова решает выпить кофе в один день, следующие два дня он пить кофе не будет. Определите, какое минимальное количество дней потребуется Вове, чтобы написать проект, состоящий из 654 строчек кода? Вова может выпить кофе в первый же день работы над проектом.

Ответ. 8
Решение. Вове выгодно пить кофе на каждый третий день, начиная с первого дня. Можно просто начать моделировать процесс и считать дни в виде $120 + 60 + 60 + 120 + 60 \ldots$, пока сумма не превысит 654. Получается, что нужно 8 дней.

Задача 2.5 (Кошачьи проблемы). В далекой сказочной стране Котляндии живут белоснежные котики, которые увлекаются программированием. Котики программируют на клавиатурах всего из четырех клавиш: **A**, **W**, **S**, **D**, ведь у них лапки. Котик Барсик хотел написать программу, состоящую всего из 32 символов. После того, как он закончил нелегкую печать лапками, он обнаружил, что что-то пошло не так: получилось слишком много символов. Барсик догадался, что одна из клавиш его клавиатуры заедает, и при однократном нажатии печатаются два одинаковых символа. Текстовый редактор показывает, что символ **A** был напечатан всего 3 раза, символ **W** – 8 раз, символ **S** – 16 раз, **D** – 10 раз. Помогите Барсику понять, какая из клавиш его клавиатуры заедает, и укажите, сколько раз ее символ должен был быть напечатан. В строку ответов запишите результат без пробелов, например, ответ *A3* означает, что клавиша **A** заедает, и что должно было быть напечатано 3 символа **A**.

Ответ. D5
Решение. Вычислим общую длину текста, который получился у Барсика:
$$3 + 8 + 16 + 10 = 37,$$
что на 5 нажатий больше, чем хотел получить Барсик. Значит, заедающая клавиша напечатала свой символ 10 раз, это клавиша **D**.

Задача 2.5+ (Кошачьи проблемы). В далекой сказочной стране Котляндии живут белоснежные котики, которые увлекаются программированием. Котики программируют на клавиатурах всего из четырех клавиш: **A**, **W**, **S**, **D**, ведь у них лапки. Котик Барсик хотел написать программу, состоящую всего из 27 символов. После того, как он закончил нелегкую печать лапками, он обнаружил, что что-то пошло не так: получилось слишком много символов. Барсик догадался, что одна из клавиш его клавиатуры заедает, и при однократном нажатии печатаются три одинаковых символа. Текстовый редактор показывает, что символ **A** был напечатан всего 4 раза, символ **W** – 8 раз, символ **S** – 15 раз,

D – 10 раз. Помогите Барсику понять, какая из клавиш его клавиатуры заедает, и укажите, сколько раз ее символ должен был быть напечатан. В строку ответов запишите результат без пробелов, например, ответ *A3* означает, что клавиша **A** заедает, и что должно было быть напечатано 3 символа **A**.

Ответ. S5

Решение. Вычислим общую длину текста, который получился у Барсика:

$$4 + 8 + 15 + 10 = 37,$$

что на 10 нажатий больше, чем хотел получить Барсик. Значит, заедающая клавиша напечатала свой символ 15 раз, это клавиша **S**.

Примечание: В течение контрольной некоторое время в задаче была опечатка и было указано, что всего Барсик хотел напечатать 32 символа. В этом случае задача была нерешаемой, поэтому ответы о нерешаемости задачи также засчитаны верными.

Автор условий и разборов: Алексей Мерзляков

ВЫХОДИ РЕШАТЬ! ВСЕРОССИЙСКАЯ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКАЯ КОНТРОЛЬНАЯ

Задача 3

Задача 3.1 (Расписание для очень важных персон)

Перед Илоной Анатольевной встала задача. В её образовательном центре планируется очередная смена по информатике, на начало которой прилетают выступать именитые лекторы. Каждый лектор – очень важная персона, которая может провести лекцию только в определенное время и определенной длительности. Лекторы подали Илоне Анатольевне заявки, сообщив время начала и конца своих лекций. Информация о заявках приведена в таблице ниже.

Лектор	**Время начала**	**Время конца**
Часовой П.	10.00	11.00
Страшилин В.	9.30	12.00
Центроид Г.	10.05	11.15
Красивин А.	11.00	12.00
Быстров К.	10.30	11.00
Вышмат П.	11.00	13.00
Душин О.	12.30	14.00
Таймлимит П.	10.55	13.30

Все выступления именитых лекторов должны произойти в один день. При этом аудиторий под смену есть только 3, поэтому не все лекторы смогут участвовать в смене. Определите, какому минимальному количеству лекторов Илоне Анатольевне придется отказать, чтобы в каждой аудитории всегда работало не более одного преподавателя. Если один лектор заканчивает лекцию, то следующий может начать заниматься сразу же.

Ответ. 2

Решение. Можно представить расписание в виде отрезков на прямой, время начала и время конца каждой лекции будут координатами концов этих отрезков. При одновременном наложении более трех отрезков в некоторой точке необходимо отказать одному из лекторов, которые ведут лекции в это время. Заметим, что в интервалах с 10:55 до 11:00 и с 11:00 до 11:15 накладываются сразу 5 отрезков. Значит, отказать придется как минимум двум лекторам. При этом отказывать нужно тем лекторам, которые занимают сразу оба указанных интервала. Отказать двум лекторам будет достаточно, если отказать, например, Страшилину В. и Таймлимиту П.

Автор условий и разборов: Алексей Мерзляков

Задача 3.1+ (Расписание для очень важных персон)
Перед Илоной Анатольевной встала задача. В её образовательном центре планируется очередная смена по информатике, на начало которой прилетают выступать именитые лекторы. Каждый лектор – очень важная персона, которая может провести лекцию только в определенное время и определенной длительности. Лекторы подали Илоне Анатольевне заявки, сообщив время начала и конца своих лекций. Информация о заявках приведена в таблице ниже.

Лектор	**Время начала**	**Время конца**
Часовой П.	10.00	11.00
Страшилин В.	9.30	12.00
Центроид Г.	10.05	11.15
Красивин А.	11.00	12.00
Быстров К.	10.30	11.00
Вышмат П.	11.00	13.00
Душин О.	12.30	14.00
Таймлимит П.	10.55	13.30

Все выступления именитых лекторов должны произойти в один день. При этом аудиторий под смену есть только 2, поэтому не все лекторы смогут участвовать в смене. Определите, какому минимальному количеству лекторов Илоне Анатольевне придется отказать, чтобы в каждой аудитории всегда работало не более одного преподавателя. Если один лектор заканчивает лекцию, то следующий может начать заниматься сразу же.

Ответ. 3
Решение. Можно представить расписание в виде отрезков на прямой, время начала и время конца каждой лекции будут координатами концов этих отрезков. При одновременном наложении более трех отрезков в некоторой точке необходимо отказать одному из лекторов, которые ведут лекции в это время. Заметим, что в интервалах с 10:55 до 11:00 и с 11:00 до 11:15 накладываются сразу 5 отрезков. Значит, отказать придется как минимум трём лекторам, например, Страшилину В., Центроид Г. и Таймлимит П.

Задача 3.2 (Питон). В языках программирования важнейшим понятием является *цикл*. Эта управляющая конструкция позволяет повторять выполнение определенного набора команд несколько раз.

На бесплатном курсе «Базовый Python» от VK Education одна из тем как раз посвящена циклам. Записывать цикл там рекомендовано так:

for i in range (N):

  тело_цикла

Запись означает, что те команды, которые записаны в *тело_цикла,* выполнятся N раз.

После освоения теории школьник Петя решил закрепить новые знания на практике и написал программу на Python, фрагмент которой приведен ниже.

```
x,y: int
x=0
y=1
for i in range (3):
    for k in range (5):
        x=x+y
        y=y+1
```

Чему будет равна целочисленная переменная ***x*** после выполнения этого фрагмента программы?

*Пояснение: «=» в Python является оператором присваивания. Например, запись «**y=y+1**» значит, что **y** становится равно предыдущему значению **y**, увеличенному на **1**.*

Ответ. *120*

Решение. Для каждого из 3 раз внешнего цикла внутренний выполнится 5 раз. Суммарно тело внутреннего цикла выполнится $3 \cdot 5 = 15$ раз. Заметим, что в переменной **x** вычисляется сумма 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + … + 15. Значит, переменная **x** станет равна 120.

Задача 3.2+ (Питон). В языках программирования важнейшим понятием является *цикл*. Эта управляющая конструкция позволяет повторять выполнение определенного набора команд несколько раз.

На бесплатном курсе «Базовый Python» от VK Education одна из тем как раз посвящена циклам. Записывать цикл там рекомендовано так:

```
for i in range (N):
    тело_цикла
```

Запись означает, что те команды, которые записаны в *тело_цикла,* выполнятся N раз.

После освоения теории школьник Петя решил закрепить новые знания на практике и написал программу на Python, фрагмент которой приведен ниже.

```
x,y: int
x=0
y=1
for i in range (3):
    for k in range (5):
        y=y+1
        x=x+y
```

Чему будет равна целочисленная переменная ***x*** после выполнения этого фрагмента программы?

*Пояснение: «=» в Python является оператором присваивания. Например, запись «**y=y+1**» значит, что **y** становится равно предыдущему значению **y**, увеличенному на **1**.*

Ответ. *135*
Решение. Для каждого из 3 раз внешнего цикла внутренний выполнится 5 раз. Суммарно тело внутреннего цикла выполнится $3 \cdot 5 = 15$ раз. Заметим, что в переменной **x** вычисляется сумма 0 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + … + 16. Значит, переменная **x** станет равна 135.

Задача 3.3 (Любопытный Паша) Однажды Паша зашел в кабинет информатики и увидел на доске записи, которые остались после недавнего занятия. К сожалению, часть символов оказалась стерта (помечены *). Паша думает, что на доске выполняли сложение в некоторой традиционной системе счисления.

$$
\begin{array}{r}
+\begin{array}{cccc} 0 & 1 & * & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \\
\hline
\begin{array}{ccccc} * & * & 1 & 0 & * \end{array}
\end{array}
$$

Ему интересно, какой же все-таки был результат в этом примере. Помогите Паше, заполнив все пропуски и выяснив, какой в примере получился результат сложения. В ответ запишите результат сложения в той же системе счисления, в которой вычислялся пример.

Ответ. 10101
Решение. Начнем с младших разрядов. 1+0=1 в любой системе счисления. В следующем разряде видим, что получился 0, значит, произошел перенос в следующий разряд. В следующем разряде видим 1 + 1 **+1** (из переноса) = 1+10 (перенос в следующий разряд). Такое получается только в двоичной системе счисления. Значит, в предыдущем разряде

пропущена 1. В третьем разряде произошел перенос в следующий разряд, значит на месте пропуска в четвертом должен быть 0, а в старшем разряде – единица.

Следовательно, пример был такой:

	0	1	1	1
	1	1	1	0
1	0	1	0	1

Задача 3.3+ (Любопытный Паша) Однажды Паша зашел в кабинет информатики и увидел на доске записи, которые остались после недавнего занятия. К сожалению, часть символов оказалась стерта (помечены *). Паша думает, что на доске выполняли сложение в некоторой традиционной системе счисления.

	1	1	*	1
	1	1	1	0
*	*	1	0	*

Ему интересно, какой же все-таки был результат в этом примере. Помогите Паше, заполнив все пропуски и выяснив, какой в примере получился результат сложения. В ответ запишите результат сложения в той же системе счисления, в которой вычислялся пример.

Ответ. 11101

Решение. Начнем с младших разрядов. 1+0=1 в любой системе счисления. В следующем разряде видим, что получился 0, значит, произошел перенос в следующий разряд. В следующем разряде видим 1 + 1 **+1** (из переноса) = 1+10 (перенос в следующий разряд). Такое получается только в двоичной системе счисления. Значит, в предыдущем разряде пропущена 1. В третьем разряде произошел перенос в следующий разряд, значит на месте пропуска в четвертом должен быть 0, а в старшем разряде – единица.

Следовательно, пример был такой:

	1	1	1	1
	1	1	1	0
1	1	1	0	1

Задача 3.4 (Вы наказаны). Девятиклассники в буфете сильно кричали, и буфетчица решила их наказать, установив новые правила продажи пирожков. На прилавке у нее лежат 10 пирожков, которые она оценила натуральными числами по их «вкусности». «Вкусности» пирожков получились такие:

10, 3, 7, 12, 4, 9, 7, 7, 9, 11.

Пирожки теперь продаются по следующим правилам. Ребята каждый раз, подходя к кассе, должны выбрать два пирожка. Буфетчица при этом выдаст ребенку пирожок меньшей вкусности из этих двух, а пирожок большей вкусности съест сама. Если пирожки имеют одинаковую вкусность, то ребенок может выбрать любой пирожок из пары. Оба выбранных пирожка пропадают с прилавка, и следующий ребенок может делать заказ. Ребята хотят сделать заказы таким образом, чтобы в итоге на прилавке не осталось пирожков, а суммарная «вкусность» пирожков, которые достанутся детям, была максимально возможной. Найдите максимально возможную суммарную «вкусность» пирожков, которые могут достаться ребятам.

Ответ. 37

Решение. Отсортируем пирожки по возрастанию их «вкусности»:

3, 4, 7, 7, 7, 9, 9, 10, 11, 12.

Очевидно, что пирожок максимальной «вкусности» ребятам никогда не удастся получить. Но к нему в пару можно выбрать максимально вкусный пирожок, который не превосходит тот максимум. Таким образом, сперва выберем два последних пирожка. Пирожок со «вкусностью» 12 съест буфетчица, а детям достанется пирожок со «вкусностью» 11.

Теперь наша задача свелась к исходной, но с восемью пирожками. Мы никак не сможем получить пирожок со вкусностью 10, но можем со вкусностью 9. И так далее. Таким образом, дети получат пирожки со вкусностями: 11 + 9 + 7 + 7 + 3 = 37.

Задача 3.4+ (Вы наказаны). Девятиклассники в буфете сильно кричали, и буфетчица решила их наказать, установив новые правила продажи пирожков. На прилавке у нее лежат 10 пирожков, которые она оценила натуральными числами по их «вкусности». «Вкусности» пирожков получились такие:

10, 3, 3, 12, 4, 9, 7, 7, 9, 11.

Пирожки теперь продаются по следующим правилам. Ребята каждый раз, подходя к кассе, должны выбрать два пирожка. Буфетчица при этом выдаст ребенку пирожок меньшей вкусности из этих двух, а пирожок большей вкусности съест сама. Если пирожки имеют одинаковую вкусность, то ребенок может выбрать любой пирожок из пары. Оба выбранных пирожка пропадают с прилавка, и следующий ребенок может делать заказ. Ребята хотят сделать заказы таким образом, чтобы в итоге на прилавке не осталось пирожков, а суммарная «вкусность» пирожков, которые достанутся детям, была максимально возможной. Найдите максимально возможную суммарную «вкусность» пирожков, которые могут достаться ребятам.

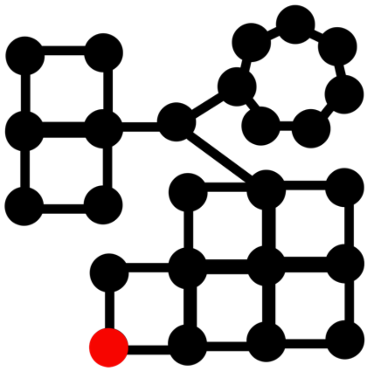
Ответ. 34

Решение. Отсортируем пирожки по возрастанию их «вкусности»:

3, 3, 4, 7, 7, 9, 9, 10, 11, 12.

Очевидно, что пирожок максимальной «вкусности» ребятам никогда не удастся получить. Но к нему в пару можно выбрать максимально вкусный пирожок, который не превосходит тот максимум. Таким образом, сперва выберем два последних пирожка. Пирожок со «вкусностью» 12 съест буфетчица, а детям достанется пирожок со «вкусностью» 11.

Теперь наша задача свелась к исходной, но с восемью пирожками. Мы никак не сможем получить пирожок со вкусностью 10, но можем со вкусностью 9. И так далее. Таким образом, дети получат пирожки со вкусностями: 11 + 9 + 7 + 4 + 3 = 34.

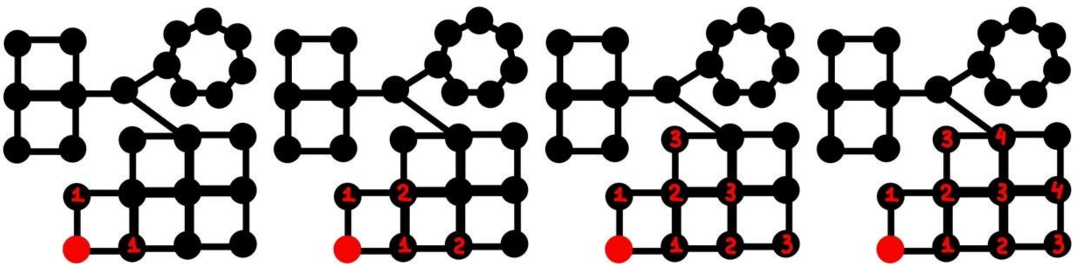


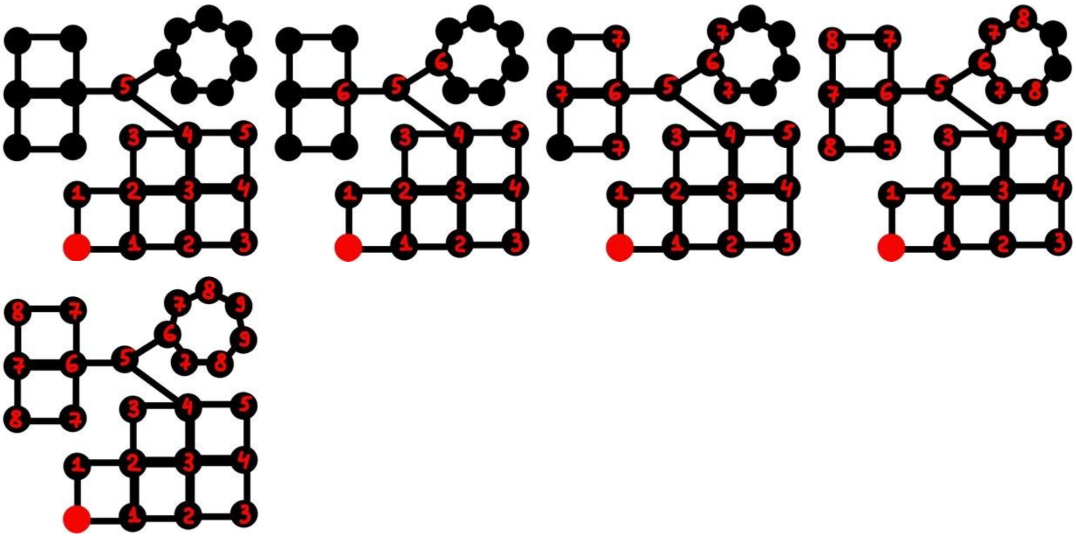
Задача 3.5 (Вирус). Специалисты секретной службы некоторой страны написали компьютерный вирус, который имеет особый способ распространения в сети. Сперва вирус устанавливается на один компьютер. Затем через одну секунду он заражает все соседние компьютеры в сети (те компьютеры, до которых можно добраться по одному проводу). Затем каждую секунду каждый зараженный вирусом компьютер заражает все соседние с ним компьютеры.

Схема локальной сети секретной базы изображена на рисунке. Стало известно, что в некоторый момент времени вирусом был заражен один компьютер, который помечен на рисунке красным цветом. Новому сотруднику системы безопасности базы поручено оценить степень бедствия, и узнать, через сколько секунд после этого момента станут заражены **все** компьютеры в сети. Помогите ему найти ответ на этот вопрос.

Ответ. 9

Решение. Для решения задачи необходимо понять, как происходит процесс заражения и промоделировать его поэтапно. Из рисунков видно: для заражения необходимо 9 секунд.





Задача 3.5+ (Вирус). Специалисты секретной службы некоторой страны написали компьютерный вирус, который имеет особый способ распространения в сети. Сперва вирус устанавливается на один компьютер. Затем через две секунды он заражает все соседние компьютеры в сети (те компьютеры, до которых можно добраться по одному проводу). Затем каждые две секунды каждый зараженный вирусом компьютер заражает все соседние с ним компьютеры.

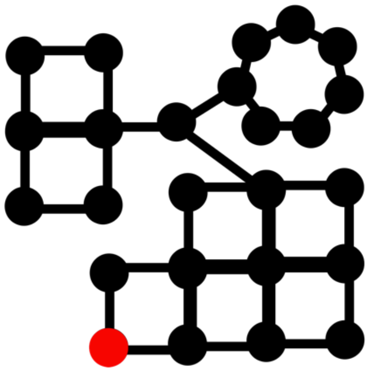
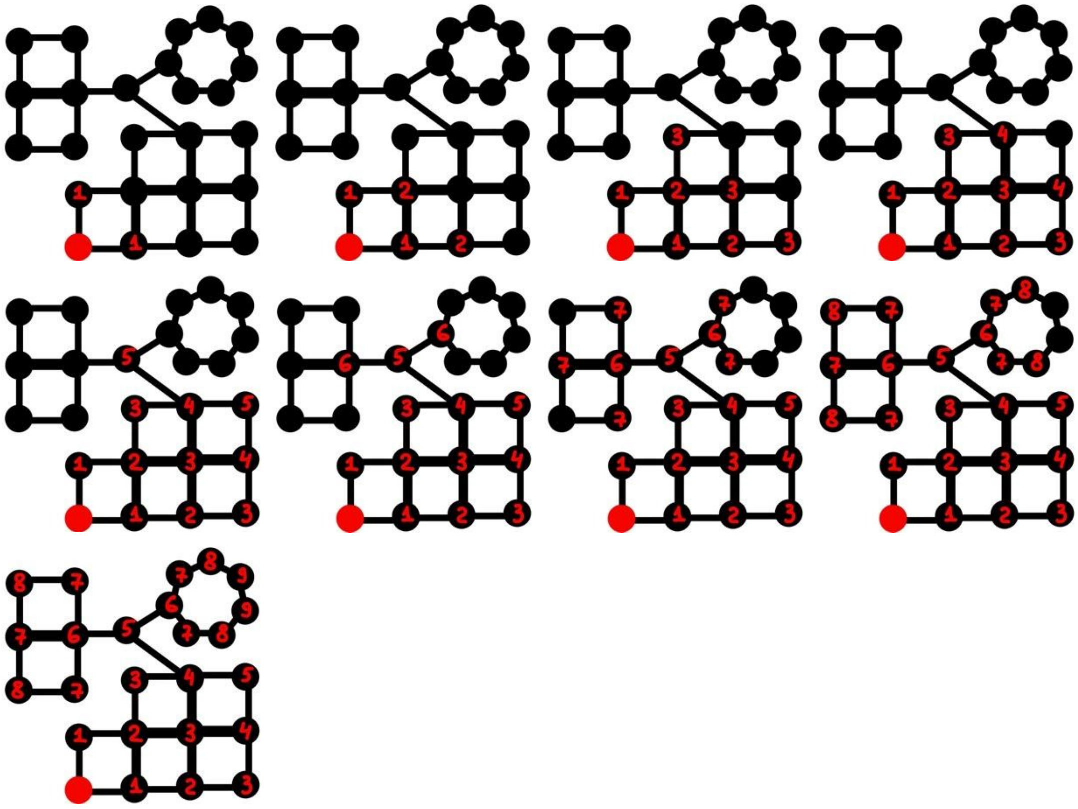


Схема локальной сети секретной базы изображена на рисунке. Стало известно, что в некоторый момент времени вирусом был заражен один компьютер, который помечен на рисунке красным цветом. Новому сотруднику системы безопасности базы поручено оценить степень бедствия, и узнать, через сколько секунд после этого момента станут заражены **все** компьютеры в сети. Помогите ему найти ответ на этот вопрос.

Ответ. 18

Решение. Для решения задачи необходимо понять, как происходит процесс заражения и промоделировать его поэтапно. Из рисунков видно: для заражения необходимо 9*2=18 секунд.



Задача 4

Задача 4.1 (Ване нравится XOR). Рассмотрим операцию побитового XOR, которая обозначается как $\oplus$. Операция возвращает 1, когда оба операнда различны, то есть $0 \oplus 0 = 0$, $1 \oplus 1 = 0$, $1 \oplus 0 = 1$ и $0 \oplus 1 = 1$. Операцию можно применять и к последовательности битов. В этом случае она применяется последовательно к каждой паре битов, которые стоят на одинаковых позициях в операндах, например, $1101 \oplus 0111 = 1010$. Операция XOR очень важна: она используется в компьютерной графике, простой криптографии, при работе с масками.

Недавно на уроке информатики Ваня изучал битовые операции. Ему стало интересно, что произойдет, если применять операцию много раз определенным образом.

Выражение вида $x \oplus x \oplus \dots \oplus x$ вычисляется последовательно, слева направо, то есть подразумевается $(\dots((x \oplus x) \oplus x) \oplus \dots)$.

Пусть $x = 10110111$. Определите, чему равен результат стократного выполнения этой операции:

$$\underbrace{x \oplus x \oplus \dots \oplus x}_{100 \text{ раз } \oplus}$$

Ответ. 10110111

Решение. Заметим, что $x \oplus x = 00000000$, так как на соответствующих позициях все пары битов будут одинаковыми. Получаем, что $x \oplus x \oplus x = 00000000 \oplus x = x$, это также следует из определения. Отсюда следует, что каждая нечетная операция XOR делает все биты равными нулю, а каждая четная будет давать результат, равный x. Так как XOR применяется 100 раз, результат будет равен x.

Задача 4.1+ (Ване нравится XOR). Рассмотрим операцию побитового XOR, которая обозначается как $\oplus$. Операция возвращает 1, когда оба операнда различны, то есть $0 \oplus 0 = 0$, $1 \oplus 1 = 0$, $1 \oplus 0 = 1$ и $0 \oplus 1 = 1$. Операцию можно применять и к последовательности битов. В этом случае она применяется последовательно к каждой паре битов, которые стоят на одинаковых позициях в операндах, например, $1101 \oplus 0111 = 1010$. Операция XOR очень важна: она используется в компьютерной графике, простой криптографии, при работе с масками.

Недавно на уроке информатики Ваня изучал битовые операции. Ему стало интересно, что произойдет, если применять операцию много раз определенным образом.

Выражение вида $x \oplus x \oplus \ldots \oplus x$ вычисляется последовательно, слева направо, то есть подразумевается $(\ldots((x \oplus x) \oplus x) \oplus \ldots)$.

Пусть $x = 10101111$. Определите, чему равен результат стократного выполнения этой операции:

$$\underbrace{x \oplus x \oplus \ldots \oplus x}_{100 \text{ раз } \oplus}$$

Ответ. 10101111

Решение. Заметим, что $x \oplus x = 00000000$, так как на соответствующих позициях все пары битов будут одинаковыми. Получаем, что $x \oplus x \oplus x = 00000000 \oplus x = x$, это также следует из определения. Отсюда следует, что каждая нечетная операция XOR делает все биты равными нулю, а каждая четная будет давать результат, равный x. Так как XOR применяется 100 раз, результат будет равен x.

Задача 4.2 (Без намеков – никак). В информатике есть целый раздел, который изучает кодирование. Кодирование — процесс преобразования сигнала из формы, удобной для непосредственного использования информации, в форму, удобную для вычислительных устройств. Например, сопоставление символов русского алфавита последовательностям из нулей и единиц. Это соответствие нередко представляют в виде кодовой таблицы, где напротив символа записывается его код. Для того, чтобы закодировать строку, необходимо последовательно записать коды каждого из ее символов слева направо, в соответствии с кодовой таблицей.

Федя совсем недавно узнал, что такое кодирование, и придумал такую кодовую таблицу:

Символ	**Код**

А	10
Б	01
В	11
Г	1

Теперь, если он, например, захочет закодировать сообщение «БАГ», то у него получится код «01101».

Федя догадался, что процесс декодирования, то есть восстановления исходного сообщения по коду, получается сложнее, и этот процесс не всегда удастся осуществить однозначно. Например, коду «1101» соответствуют сообщения «ВБ», «ГАГ» и «ГГБ».

Недавно подруга Феди прислала ему код **10110110**. Теперь Федя занимается привычным для себя делом: он пытается понять, сколько существует возможных вариантов декодирования этого сообщения. Помогите ему узнать это число.

Ответ. 5

Решение. Можно вести обработку слева направо, пытаясь перебирать возможные варианты кодов символов. Например, начало строки можно декодировать как «Г» + 0110110 или как «А» + 110110. Далее продолжить аналогичный перебор для каждого получившегося варианта. Иногда будут получаться однозначные декодирования, как, например, в первом случае, потому что «01...» всегда соответствует «Б…». Продолжая этот процесс, можно получить всего 5 сообщений: «ГБГБА», «ГБАГА», «АГГБА», «АГАГА» и «АВБА».

Задача 4.2+ (Без намеков – никак). В информатике есть целый раздел, который изучает кодирование. Кодирование — процесс преобразования сигнала из формы, удобной для непосредственного использования информации, в форму, удобную для вычислительных устройств. Например, сопоставление символов русского алфавита последовательностям из нулей и единиц. Это соответствие нередко представляют в виде кодовой таблицы, где напротив символа записывается его код. Для того, чтобы закодировать строку, необходимо последовательно записать коды каждого из ее символов слева направо, в соответствии с кодовой таблицей.

Федя совсем недавно узнал, что такое кодирование, и придумал такую кодовую таблицу:

Символ	**Код**
А	10
Б	01
В	11
Г	1

Теперь, если он, например, захочет закодировать сообщение «БАГ», то у него получится код «01101».

Федя догадался, что процесс декодирования, то есть восстановления исходного сообщения по коду, получается сложнее, и этот процесс не всегда удастся осуществить однозначно. Например, коду «1101» соответствуют сообщения «ВБ», «ГАГ» и «ГГБ».

Недавно подруга Феди прислала ему код **11010110**. Теперь Федя занимается привычным для себя делом: он пытается понять, сколько существует возможных вариантов декодирования этого сообщения. Помогите ему узнать это число.

Ответ. 4

Решение. Можно вести обработку слева направо, пытаясь перебирать возможные варианты кодов символов. Например, начало строки можно декодировать как «Г» + 1010110 или как «В» + 010110. Далее продолжить аналогичный перебор для каждого получившегося варианта. Иногда будут получаться однозначные декодирования, как, например, во втором случае, потому что «01...» всегда соответствует «Б…». Продолжая этот процесс, можно получить всего 3 сообщения: «ГААГА», «ГГББА» и «ВББА».

Задача 4.3 (Иногда лучше тетрадки не подбирать). Директор физико-математического лицея в очередной раз засиделся на работе. Гуляя по коридору поздно вечером около кабинета информатики, он обнаружил забытую тетрадь, которая лежала под лавочкой. Он подобрал тетрадь, открыл и очень удивился. В ней сначала 5 раз было написано:

«Все высказывания, которые написаны ниже данного, ложны».

Затем 5 раз было написано:

«Все высказывания, которые написаны выше данного, ложны».

Директору стало интересно, какое максимальное количество <u>истинных</u> высказываний может быть в этой тетради? Помогите ему найти ответ на этот непростой вопрос.

Ответ. 1

Решение. Сначала сформулируем высказывание, логически противоположное утверждению «*Все высказывания, которые написаны ниже данного, ложны*»: «*Существует высказывание, которое написано ниже данного и истинно*».

Записи в тетради, если пронумеровать строки, выглядят следующим образом:

1. *Все высказывания, которые написаны ниже данного, ложны*
2. *Все высказывания, которые написаны ниже данного, ложны*

…

5. *Все высказывания, которые написаны ниже данного, ложны*
6. *Все высказывания, которые написаны выше данного, ложны*
7. *Все высказывания, которые написаны выше данного, ложны*

…

10. *Все высказывания, которые написаны выше данного, ложны*

Предположим, что в тетради нет истинных высказываний. Тогда оказывается, что первое или последнее высказывания истинны, противоречие. Значит, в тетради есть хотя бы одно истинное высказывание. Заметим, что среди первых пяти высказываний не может быть двух одновременно истинных, потому что более нижнее из них будет противоречить более верхнему. Аналогично среди нижних пяти. Теперь покажем, что среди высказываний 1-4 не может быть ни одного истинного. Действительно, если предположить, что некоторое из высказываний, например, 2-е истинно, тогда верно, что все остальные ниже него ложны. Но тогда получается, что и третье высказывание истинно. А значит, предположение о том, что 2-е высказывание истинно, неверно. Противоречие. Аналогично можно рассуждать и про нижнюю половину (про высказывания 7-10).

Из всего этого можно сделать вывод, что истинными могут быть только высказывания 5 или 6. Так как они противоречат друг другу, они не могут быть истинными одновременно. Следовательно, в тетради истинным может быть только одно высказывание, и это либо высказывание 5, либо высказывание 6.

Задача 4.3+ (Иногда лучше тетрадки не подбирать). Директор физико-математического лицея в очередной раз засиделся на работе. Гуляя по коридору поздно вечером около кабинета информатики, он обнаружил забытую тетрадь, которая лежала под лавочкой. Он подобрал тетрадь, открыл и очень удивился. В ней сначала 5 раз было написано:

«Все высказывания, которые написаны ниже данного, ложны».

Затем 5 раз было написано:

«Все высказывания, которые написаны выше данного, ложны».

Директору стало интересно, какое максимальное количество ложных высказываний может быть в этой тетради? Помогите ему найти ответ на этот непростой вопрос.

Ответ. 9

Решение. Сначала сформулируем высказывание, логически противоположное утверждению «*Все высказывания, которые написаны ниже данного, ложны*»: «*Существует высказывание, которое написано ниже данного и истинно*».

Записи в тетради, если пронумеровать строки, выглядят следующим образом:

1. *Все высказывания, которые написаны ниже данного, ложны*
2. *Все высказывания, которые написаны ниже данного, ложны*

…

5. *Все высказывания, которые написаны ниже данного, ложны*
6. *Все высказывания, которые написаны выше данного, ложны*
7. *Все высказывания, которые написаны выше данного, ложны*

…

10. *Все высказывания, которые написаны выше данного, ложны*

Предположим, что в тетради нет истинных высказываний. Тогда оказывается, что первое или последнее высказывания истинны, противоречие. Значит, в тетради есть хотя бы одно истинное высказывание. Заметим, что среди первых пяти высказываний не может быть двух одновременно истинных, потому что более нижнее из них будет противоречить более верхнему. Аналогично среди нижних пяти. Теперь покажем, что среди высказываний 1-4 не может быть ни одного истинного. Действительно, если предположить, что некоторое из высказываний, например, 2-е истинно, тогда верно, что все остальные ниже него ложны. Но тогда получается, что и третье высказывание истинно. А значит, предположение о том, что 2-е высказывание истинно, неверно. Противоречие. Аналогично можно рассуждать и про нижнюю половину (про высказывания 7-10).

Из всего этого можно сделать вывод, что истинными могут быть только высказывания 5 или 6. Так как они противоречат друг другу, они не могут быть истинными одновременно. При этом ложными они тоже не могут быть одновременно, поскольку в этом случае они оба становятся истинными. Следовательно, в тетради истинным может быть только одно высказывание, и это либо высказывание 5, либо высказывание 6. Остальные 9 высказываний – ложные.

Задача 4.4 (Хеллоуин) Карл и Клара на Хэллоуин, согласно традициям, ходили по домам соседей и предлагали им выбор: «сладости» или «пакости». По итогу Карл собрал в свой мешочек 100 конфет, а Клара 45 конфет. Теперь они в форме игры решили поделить «награбленное».

Каждый ход Карл и Клара выполняют следующие действия **по очереди**:

1. Принять решение, обменяться ли мешочками с конфетами с другом или же оставить свой текущий мешочек. Мнение друга при этом не важно.
2. Съесть одну конфету из своего мешочка. Перед выполнением этого шага в мешочке должна быть хотя бы одна конфета.

К сожалению, конфеты, как и все хорошее, могут закончиться. Поэтому после какого-то количества ходов один из друзей не сможет сделать ход и проиграет. Ребята не хотят проигрывать, потому всегда действуют самым оптимальным образом. Определите, кто выиграет в этой игре, если Карл первым сделает ход, а также минимальное количество обменов мешочками, которое может произойти в этой партии. В ответе запишите количество обменов мешочками со знаком «минус», если выиграет Клара, и без знаков, если выиграет Карл.

Ответ. 54

Решение. Заметим, что обмены мешочками не влияют на результат игры. В случае, если еда останется только в одном мешочке, участники игры смогут обмениваться ими и продолжать играть. Проигрышной является позиция (0, 0), и в нее можно прийти, когда в одном из мешочков осталась одна конфета. Каждый ход гарантированно уменьшает суммарное количество конфет на 1. Поэтому четность номера хода, после которого будет получена проигрышная позиция, зависит от четности суммарного количества конфет, которое было в начале игры. Суммарно было 145 конфет, это число нечетное. Так как первый ходит Карл, то выигрывает Карл.

Оптимальной является любая стратегия, при которой игрок не пытается есть из пустого мешочка, когда в другом еще есть конфеты. Кроме того, заметим, что обмен мешочками не является необходимым, пока количество конфет в каждом из мешочков ненулевое. Чтобы вычислить минимальное количество обменов в оптимальной партии, можно представить ситуацию, когда игроки не обмениваются мешочками вообще, пока в каждом из них есть конфеты. Как только в одном из мешочков становится ноль конфет, они начинают передавать его сопернику. До достижения ситуации «один мешочек пустой» каждый игрок съест по 45 конфет. В момент, когда в мешочке Клары окажется 0 конфет, у

Карла их будет 55. Затем Карл съест одну конфету, и их останется 54. Далее будет 54 хода с вынужденными обменами.

Задача 4.4+ (Хеллоуин) Карл и Клара на Хэллоуин, согласно традициям, ходили по домам соседей и предлагали им выбор: «сладости» или «пакости». По итогу Карл собрал в свой мешочек 100 конфет, а Клара 45 конфет. Теперь они в форме игры решили поделить «награбленное».

Каждый ход Карл и Клара выполняют следующие действия **по очереди**:

1. Принять решение, обменяться ли мешочками с конфетами с другом или же оставить свой текущий мешочек. Мнение друга при этом не важно.
2. Съесть одну конфету из своего мешочка. Перед выполнением этого шага в мешочке должна быть хотя бы одна конфета.

К сожалению, конфеты, как и все хорошее, могут закончиться. Поэтому после какого-то количества ходов один из друзей не сможет сделать ход и проиграет. Ребята не хотят проигрывать, потому всегда действуют самым оптимальным образом. Определите, кто выиграет в этой игре, если Клара первой сделает ход, а также минимальное количество обменов мешочками, которое может произойти в этой партии. В ответе запишите количество обменов мешочками со знаком «минус», если выиграет Клара, и без знаков, если выиграет Карл.

Ответ. 55

Решение. Заметим, что обмены мешочками не влияют на результат игры. В случае, если еда останется только в одном мешочке, участники игры смогут обмениваться ими и продолжать играть. Проигрышной является позиция (0, 0), и в нее можно прийти, когда в одном из мешочков осталась одна конфета. Каждый ход гарантированно уменьшает суммарное количество конфет на 1. Поэтому четность номера хода, после которого будет получена проигрышная позиция, зависит от четности суммарного количества конфет, которое было в начале игры. Суммарно было 145 конфет, это число нечетное. Так как первой ходит Клара, то выигрывает Клара.

Оптимальной является любая стратегия, при которой игрок не пытается есть из пустого мешочка, когда в другом еще есть конфеты. Кроме того, заметим, что обмен мешочками не является необходимым, пока количество конфет в каждом из мешочков ненулевое. Чтобы вычислить минимальное количество обменов в оптимальной партии, можно представить ситуацию, когда игроки не обмениваются мешочками вообще, пока в каждом из них есть конфеты. Как только в одном из мешочков становится ноль конфет, они начинают передавать его сопернику. До достижения ситуации «один мешочек пустой» каждый игрок съест по 45 конфет. В момент, когда в мешочке Клары окажется 0 конфет, у Карла их будет 55. Далее будет 55 ходов с вынужденными обменами.

Задача 5

Задача 5.1 (Факториальная система) Напомним, что факториалом числа n называют произведение всех целых чисел от 1 до n: $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$. Для очень больших чисел (порядка, например, количества частиц наблюдаемой вселенной) нередко используют особые способы записи. Например, ученые могут обратиться к факториальной системе счисления. Это нетрадиционная система, ее базисом является последовательность факториалов: 1!, 2!, 3! и так далее. То есть нулевой разряд имеет «вес» 1!=1, первый разряд имеет «вес» 2!=2, второй разряд имеет «вес» 3!=6. В записи числа из-за этого возникают особенности: в нулевом разряде доступны только цифры 0 и 1, в первом разряде – 0, 1 и 2, во втором – 0, 1, 2 и 3, в i-м разряде – цифры от 0 до (i+1). Например, число $210_!$ записано корректно в факториальной системе, а вот число $123_!$ некорректное, так как в нулевом разряде не может быть цифры, большей, чем 1.

Отсюда довольно легко понять соответствие между факториальной и десятичной системами. Например, $1210_! = 1 \cdot 4! + 2 \cdot 3! + 1 \cdot 2! + 0 \cdot 1! = 38_{10}$. Так как последовательность факториалов быстро растет, большие числа в факториальной системе записываются небольшим количеством цифр, что и делает эту систему востребованной.

Попробуйте себя в работе с нетрадиционными системами счисления. Чему равно максимальное число, которое записывается в факториальной системе счисления с помощью пяти цифр? Ответ запишите в **десятичной** системе счисления.

Ответ. 719

Решение. Максимальное пятизначное число в факториальной системе выглядит как $54321_!$, то есть в каждый разряд необходимо поставить максимально возможную цифру. Теперь необходимо перевести это факториальное число в десятичную систему. Можно выполнить это большим вычислением $54321_! = 5 \cdot 5! + 4 \cdot 4! + \cdots$. К ответу можно прийти и проще, поняв, что максимальное пятизначное число — это минимальное шестизначное минус один. То есть ответ можно получить как $54321_! = 100000_! - 1 = 6! - 1 = 719$.

Задача 5.1+ (Факториальная система) Напомним, что факториалом числа n называют произведение всех целых чисел от 1 до n: $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$. Для очень больших чисел (порядка, например, количества частиц наблюдаемой вселенной) нередко используют особые способы записи. Например, ученые могут обратиться к факториальной системе счисления. Это нетрадиционная система, ее базисом является последовательность факториалов: 1!, 2!, 3! и так далее. То есть нулевой разряд имеет «вес» 1!=1, первый разряд имеет «вес» 2!=2, второй разряд имеет «вес» 3!=6. В записи числа из-за этого возникают особенности: в нулевом разряде доступны только цифры 0 и 1, в первом разряде – 0, 1 и 2, во втором – 0, 1, 2 и 3, в i-м разряде – цифры от 0 до (i+1). Например, число $210_!$ записано корректно в факториальной системе, а вот число $123_!$ некорректное, так как в нулевом разряде не может быть цифры, большей, чем 1.

Отсюда довольно легко понять соответствие между факториальной и десятичной системами. Например, $1210_! = 1 \cdot 4! + 2 \cdot 3! + 1 \cdot 2! + 0 \cdot 1! = 38_{10}$. Так как последовательность факториалов быстро растет, большие числа в факториальной системе записываются небольшим количеством цифр, что и делает эту систему востребованной.

Попробуйте себя в работе с нетрадиционными системами счисления. Чему равно максимальное число, которое записывается в факториальной системе счисления с помощью шести цифр? Ответ запишите в **десятичной** системе счисления.

Ответ. *5039*

Решение. Максимальное пятизначное число в факториальной системе выглядит как $654321_!$, то есть в каждый разряд необходимо поставить максимально возможную цифру. Теперь необходимо перевести это факториальное число в десятичную систему. Можно выполнить это большим вычислением $654321_! = 6 \cdot 6! + 5 \cdot 5! + \cdots$. К ответу можно прийти и проще, поняв, что максимальное пятизначное число — это минимальное семизначное минус один. То есть ответ можно получить как $654321_! = 1000000_! - 1 = 7! - 1 = 5039$.

Задача 5.2 (Робот) В лаборатории Роскосмоса робот размещен на столе в квадратной матрице 6×5 клеток. В начале эксперимента он находится в левой верхней клетке **S**. Робот умеет перемещаться за один ход на одну клетку вправо или на одну клетку вниз. Роботу нужно добраться до правой нижней клетки **F**. К сожалению, в клетки **X** с координатами (3, 2) и **Y** с координатами (4, 5) была пролита кислота, и если робот попадет в какую-либо из них, то сразу же сломается и не сможет доехать до финиша **F**. Перед запусками эксперимента исследователям стало интересно, сколькими способами робот может добраться из клетки **S** в клетку **F**, не попадая в клетки **X** и **Y**?

	1	**2**	**3**	**4**	**5**
1	**S**				
2					
3		**X**			
4					**Y**
5					
6					**F**

Ответ. 43

Решение. Задачу можно решать методом динамического программирования. Пусть $d_{i,j}$ – количество различных путей из **S**, которые не попадают в клетки **X** и **Y** и заканчиваются в рассматриваемой клетке (i, j). В каждую клетку робот может попасть либо слева, либо сверху. Следовательно:

$$d_{i,j} = d_{i-1,j} + d_{i,j-1}.$$

Для удобства запишем значения $d_{i,j}$ прямо в поле, вычисляя их последовательно слева направо, сверху вниз, начиная от клетки **S**. Очевидно, что все $d_{1,j}$ и $d_{i,1}$ равны 1, так как в эти клетки робот может попасть единственным способом, двигаясь только вправо или только вниз. Остальные клетки заполняются согласно предложенной формуле.

Необходимо верно учесть клетки с кислотой, в них положим $d_X = 0, d_Y = 0$. Таким образом мы отсечем все варианты, которые оканчиваются в клетках **X** и **Y** (а значит, отсечем и пути, которые через них проходят).

	1	**2**	**3**	**4**	**5**
1	1	1	1	1	1
2	1	2	3	4	5
3	1	**0**	3	7	12
4	1	1	4	11	**0**
5	1	2	6	17	17
6	1	3	9	26	**43**

Ответ на задачу будет вычислен в $d_{6,5}$.

Задача 5.2+ (Робот) В лаборатории Роскосмоса робот размещен на столе в квадратной матрице 6×5 клеток. В начале эксперимента он находится в левой верхней клетке **S**. Робот умеет перемещаться за один ход на одну клетку вправо или на одну клетку вниз. Роботу нужно добраться до правой нижней клетки **F**. К сожалению, в клетки **X** с координатами (3, 3) и **Y** с координатами (4, 5) была пролита кислота, и если робот попадет в какую-либо из них, то сразу же сломается и не сможет доехать до финиша **F**. Перед запусками эксперимента исследователям стало интересно, сколькими способами робот может добраться из клетки **S** в клетку **F**, не попадая в клетки **X** и **Y**?

	1	**2**	**3**	**4**	**5**
1	**S**				
2					
3			**X**		
4					**Y**
5					
6					**F**

Ответ. 49

Решение. Задачу можно решать методом динамического программирования. Пусть $d_{i,j}$ – количество различных путей из **S**, которые не попадают в клетки **X** и **Y** и заканчиваются в рассматриваемой клетке (i, j). В каждую клетку робот может попасть либо слева, либо сверху. Следовательно:

$$d_{i,j} = d_{i-1,j} + d_{i,j-1}.$$

ВЫХОДИ РЕШАТЬ! ВСЕРОССИЙСКАЯ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКАЯ КОНТРОЛЬНАЯ

Для удобства запишем значения $d_{i,j}$ прямо в поле, вычисляя их последовательно слева направо, сверху вниз, начиная от клетки **S**. Очевидно, что все $d_{1,j}$ и $d_{i,1}$ равны 1, так как в эти клетки робот может попасть единственным способом, двигаясь только вправо или только вниз. Остальные клетки заполняются согласно предложенной формуле.
Необходимо верно учесть клетки с кислотой, в них положим $d_X = 0, d_Y = 0$. Таким образом мы отсечем все варианты, которые оканчиваются в клетках **X** и **Y** (а значит, отсечем и пути, которые через них проходят).

	1	**2**	**3**	**4**	**5**
1	**1**	1	1	1	1
2	1	2	3	4	5
3	1	3	**X**	4	9
4	1	4	4	8	**Y**
5	1	5	9	17	17
6	1	6	15	32	**49**

Ответ на задачу будет вычислен в $d_{6,5}$.

Задача 5.3 В информатике изучаются не только традиционные системы счисления, но и особые, нетрадиционные. Одной из таких систем является уравновешенная троичная система. Базисом этой системы счисления является последовательность 1, 3, 9, 27 и так далее по степеням тройки. То есть нулевой разряд имеет «вес» 1, первый разряд имеет «вес» 3, второй разряд имеет «вес» 9 и так далее. Цифры в этой системе необычные: используются «1», «0» и «$\underline{1}$» (минус 1).

Например, число 4 в уравновешенной троичной системе записывается как «11», так как $4 = 1 * 3^1 + 1$. А вот число 5 записывается как «$1\underline{1}\underline{1}$», ведь $5 = 1 * 3^2 - 1 * 3^1 - 1$.

В уравновешенной троичной системе счисления записано число $110\underline{1}1\underline{1}\underline{1}1$**.** Запишите это число в традиционной троичной системе счисления.

Ответ. 10220121
Решение. Из равенства $2_3 = 1\underline{1}$ можно получить прямой алгоритм перевода между троичной уравновешенной и традиционной системами. При этом 0 и 1 переходят в 0 и 1 соответственно. Начнем перевод заданного числа с младших разрядов. 1 останется 1 в традиционной троичной. $\underline{1\underline{1}\underline{1} = 012_3}$, так $1\underline{1} = 2$, а затем из этого разряда еще отнимается единица. В следующей части заданного числа «$10\underline{1}$» пытаемся занять единицу из разряда, в котором цифра 0, для этого придется занять ее у более старшего разряда. Получаем $\underline{10\underline{1} = 022_3}$. Старшая единица заданного числа остается без изменений.

Задачу можно решить по определению, выполнив большие вычисления. Сначала из троичной уравновешенной системы перевести в десятичную, получив число 2851, а затем перевести в троичную систему стандартным алгоритмом.

Задача 5.3+ В информатике изучаются не только традиционные системы счисления, но и особые, нетрадиционные. Одной из таких систем является уравновешенная троичная система. Базисом этой системы счисления является последовательность 1, 3, 9, 27 и так далее по степеням тройки. То есть нулевой разряд имеет «вес» 1, первый разряд имеет «вес» 3, второй разряд имеет «вес» 9 и так далее. Цифры в этой системе необычные: используются «1», «0» и «$\underline{1}$» (минус 1).

Например, число 4 в уравновешенной троичной системе записывается как «11», так как $4 = 1 * 3^1 + 1$. А вот число 5 записывается как «$1\underline{1}\underline{1}$», ведь $5 = 1 * 3^2 - 1 * 3^1 - 1$.

В уравновешенной троичной системе счисления записано число $110\underline{1}1\underline{1}\underline{1}0$**.** Запишите это число в традиционной троичной системе счисления.

Ответ. 10220120

Решение. Из равенства $2_3 = 1\underline{1}$ можно получить прямой алгоритм перевода между троичной уравновешенной и традиционной системами. При этом 0 и 1 переходят в 0 и 1 соответственно. Начнем перевод заданного числа с младших разрядов. 0 останется 0 в традиционной троичной. $\underline{1\underline{1}\underline{1} = 012_3}$, так $1\underline{1} = 2$, а затем из этого разряда еще отнимается единица. В следующей части заданного числа «$10\underline{1}$» пытаемся занять единицу из разряда, в котором цифра 0, для этого придется занять ее у более старшего разряда. Получаем $\underline{10\underline{1} = 022_3}$. Старшая единица заданного числа остается без изменений.

Задачу можно решить по определению, выполнив большие вычисления. Сначала из троичной уравновешенной системы перевести в десятичную, получив число 2850, а затем перевести в троичную систему стандартным алгоритмом.

Задача 5.4 (ПМЭФ) На Петербургском международном экономическом форуме на одной из секций собралось 5 представителей сферы бизнеса и 5 руководителей государственных компаний. Во время форума некоторые бизнесмены делали деловые предложения некоторым руководителям государственных компаний, но не более одного предложения в каждой паре «бизнесмен + руководитель». Председателю представили предварительную статистику, из которой видно, что участников этой секции форума можно единственным образом разделить на 5 пар, в каждой из которых бизнесмен сделал предложение руководителю государственной компании. Председателю интересно, какое наибольшее количество предложений могло быть сделано?

Ответ. 15

Решение. Пусть каждый бизнесмен сделал предложение хотя бы двум руководителям госкомпаний. Рассмотрим направленный граф, в котором вершинами будут бизнесмены и руководители. Проведем красное ребро от каждого руководителя к каждому бизнесмену, если они находятся в паре согласно условию. От каждого бизнесмена проведем синее ребро к какому-то другому руководителю, которому этот бизнесмен делал предложение, и который не попал с ним в пару. Тогда из каждого участника секции выходит по одному ребру. Можно видеть, что в полученном графе есть как минимум один цикл. Поменяем окраску в этом цикле, заменив синие ребра на красные, а красные на синие. Тогда красные ребра снова образуют корректные пары, а значит, участников секции нельзя единственным образом поделить на пары, - противоречие.

Из этого следует, что хотя бы один бизнесмен сделал всего одно предложение. Удалим его пару из рассмотрения. Тому руководителю, который был с ним в паре, могло при этом поступить максимум 5 предложений. Рассмотрим новый граф по тому же принципу, который получился после удаления этих двух вершин и всех инцидентных ребер. К нему применимы все те же рассуждения. В нем снова есть бизнесмен, который сделал всего одно предложение. Удаляя его пару, мы удалим еще не более чем 4 предложения из рассмотрения. И так далее. Ответом к задаче является сумма
5 + 4 + 3 + 2 +1 = 15.

Задача 5.4+ (ПМЭФ) На Петербургском международном экономическом форуме на одной из секций собралось 6 представителей сферы бизнеса и 6 руководителей государственных компаний. Во время форума <u>некоторые</u> бизнесмены делали деловые предложения <u>некоторым</u> руководителям государственных компаний, но не более одного предложения в каждой паре «бизнесмен + руководитель». Председателю представили предварительную статистику, из которой видно, что участников этой секции форума можно единственным образом разделить на 6 пар, в каждой из которых бизнесмен сделал предложение руководителю государственной компании. Председателю интересно, какое наибольшее количество предложений могло быть сделано?

Ответ. 21

Решение. Пусть каждый бизнесмен сделал предложение хотя бы двум руководителям госкомпаний. Рассмотрим направленный граф, в котором вершинами будут бизнесмены и руководители. Проведем красное ребро от каждого руководителя к каждому бизнесмену, если они находятся в паре согласно условию. От каждого бизнесмена проведем синее ребро к какому-то другому руководителю, которому этот бизнесмен делал предложение, и который не попал с ним в пару. Тогда из каждого участника секции выходит по одному ребру. Можно видеть, что в полученном графе есть как минимум один цикл. Поменяем окраску в этом цикле, заменив синие ребра на красные, а красные на синие. Тогда красные ребра снова образуют корректные пары, а значит, участников секции нельзя единственным образом поделить на пары, - противоречие.

Из этого следует, что хотя бы один бизнесмен сделал всего одно предложение. Удалим его пару из рассмотрения. Тому руководителю, который был с ним в паре, могло при этом поступить максимум 6 предложений. Рассмотрим новый граф по тому же принципу, который получился после удаления этих двух вершин и всех инцидентных ребер. К нему применимы все те же рассуждения. В нем снова есть бизнесмен, который сделал всего одно предложение. Удаляя его пару, мы удалим еще не более чем 5 предложений из рассмотрения. И так далее. Ответом к задаче является сумма
6 + 5 + 4 + 3 + 2 +1 = 21.

Автор условий и разборов: Алексей Мерзляков

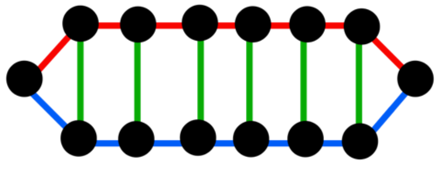
Задача 5.5 (Суперземляне могут все) На далекой планете нашей Вселенной суперземляне придумали устойчивую систему из порталов трех разных цветов: красных, синих и зеленых. Всего на этой планете 14 военных баз, и все эти базы связаны между собой порталами таким образом, что если одновременно из строя выйдут все порталы определенного цвета, то из любой базы можно будет добраться до любой другой через порталы двух оставшихся цветов, возможно, посещая промежуточные базы. При этом для того, чтобы связать две определённых базы, нужно построить отдельную пару порталов (например, через некоторый зелёный портал можно попасть только на одну конкретную базу, куда он ведёт, но не на любую другую базу с зелёным порталом). Создание пары порталов между двумя базами стоит 1000 кристаллов. Руководству Суперземли интересно, какое минимальное количество кристаллов следует затратить, чтобы создать такую систему порталов?

Ответ. 20000

Решение. Пусть на планете используется x порталов красного цвета, y порталов синего цвета, и z порталов зеленого цвета. Представим условие задачи в виде графа, где вершинами будут военные базы, а ребра между двумя вершинами проведены в случае, если есть портал, который соединяет эти базы. Тогда после того, как перестанут работать порталы одного цвета, граф должен остаться связным. В связном графе количество вершин не больше, чем количество ребер плюс единица.

Поэтому, если откажут, например, красные порталы, должно быть 14 <= y + z + 1, т.е. $y + z \geq 13$. Аналогичные неравенства получатся, если отключить порталы синего или зеленого цветов. Сложим три таких неравенства и получим, что $2\,(x + y + z) \geq 39$, откуда общее количество порталов должно быть не менее 19,5, то есть не менее 20 штук. Действительно, можно построить граф из 14 вершин и 20 ребер, удовлетворяющий условию. Ниже предлагается пример.

Следовательно, нужно затратить 20000 кристаллов.



Задача 5.5+ (Суперземляне могут все) На далекой планете нашей Вселенной суперземляне придумали устойчивую систему из порталов трех разных цветов: красных, синих и зеленых. Всего на этой планете 12 военных баз, и все эти базы связаны между собой порталами таким образом, что если одновременно из строя выйдут все порталы определенного цвета, то из любой базы можно будет добраться до любой другой через порталы двух оставшихся

цветов, возможно, посещая промежуточные базы. При этом для того, чтобы связать две определённых базы, нужно построить отдельную пару порталов (например, через некоторый зелёный портал можно попасть только на одну конкретную базу, куда он ведёт, но не на любую другую базу с зелёным порталом). Создание пары порталов между двумя базами стоит 1000 кристаллов. Руководству Суперземли интересно, какое минимальное количество кристаллов следует затратить, чтобы создать такую систему порталов?

Ответ. 17000

Решение. Пусть на планете используется x порталов красного цвета, y порталов синего цвета, и z порталов зеленого цвета. Представим условие задачи в виде графа, где вершинами будут военные базы, а ребра между двумя вершинами проведены в случае, если есть портал, который соединяет эти базы. Тогда после того, как перестанут работать порталы одного цвета, граф должен остаться связным. В связном графе количество вершин не больше, чем количество ребер плюс единица.

Поэтому, если откажут, например, красные порталы, должно быть 12 <= y + z + 1, т.е. $y + z \geq 11$. Аналогичные неравенства получатся, если отключить порталы синего или зеленого цветов. Сложим три таких неравенства и получим, что $2\,(x + y + z) \geq 33$, откуда общее количество порталов должно быть не менее 16,5, то есть не менее 17 штук. Действительно, можно построить граф из 12 вершин и 17 ребер, удовлетворяющий условию. Ниже предлагается пример.

Следовательно, нужно затратить 17000 кристаллов.