

Блок задач №1

Задача 1.1

2 блогера снимают суммарно 2 VK Клипа за 2 дня. Сколько VK Клипов снимут 4 блогера за 4 дня?

Решение:

2 блогера за 4 дня снимут $2 \cdot 2 = 4$ VK Клипа. Значит 4 блогера снимут $4 \cdot 2 = 8$ VK Клипов.

Ответ: 8

Задача 1.1+

2 блогера снимают суммарно 4 VK Клипа за 2 дня. Сколько VK Клипов снимут 4 блогера за 4 дня?

Решение:

2 блогера за 4 дня снимут $2 \cdot 4 = 8$ VK Клипов. Значит 4 блогера снимут $8 \cdot 2 = 16$ VK Клипов.

Ответ: 16

Задача 1.2

Антон воспользовался приложением для контроля экранного времени в телефоне и выяснил, что он проводит за просмотром любимых блогеров в VK Видео 2 часа в день. Чтобы быть более эффективным, Антон решил попробовать смотреть видео ускоренно на $\times 2$ (то есть каждое видео воспроизводится в 2 раза быстрее). К концу недели он заметил, что число просматриваемых роликов в день возросло в 3 раза. Сколько часов в день Антон проводит в VK Видео теперь?

Решение:

Время, затрачиваемое на 1 ролик, уменьшилось в 2 раза из-за увеличения скорости воспроизведения. При этом количество роликов увеличилось в 3 раза. Тогда итоговое время, затрачиваемое на просмотр:
 $2 \text{ часа} \cdot 3 / 2 = 3 \text{ часа}$ в день.

Ответ: 3

Задача 1.2+

Антон воспользовался приложением для контроля экранного времени в телефоне и выяснил, что он проводит за просмотром любимых блогеров в VK Видео 2 часа в день. Чтобы быть более эффективным, Антон решил попробовать смотреть видео ускоренно на $\times 2$ (то есть каждое видео воспроизводится в 2 раза быстрее). К концу недели он заметил, что число просматриваемых роликов в день возросло в 2 раза. Сколько часов в день Антон проводит в VK Видео теперь?

Решение:

Время, затрачиваемое на 1 ролик, уменьшилось в 2 раза из-за увеличения скорости воспроизведения. При этом количество роликов увеличилось в 2 раза. Тогда итоговое время, затрачиваемое на просмотр:
 $2 \text{ часа} * 2 / 2 = 2 \text{ часа в день.}$

Ответ: 2

Задача 1.3

4 друга заметили на улице своего любимого блогера Григория Илидругому. В своем шоу Григорий предлагает случайным прохожим определенную сумму денег. Если прохожий отказывается, то блогер предложит следующему прохожему в 2 раза больше. Друзья увидели, как неизвестный отказался от суммы в 500 рублей, и решили воспользоваться моментом. По плану все друзья будут по очереди подходить к блогеру, увеличивая сумму, а последний заберет все деньги. Какой максимальный выигрыш (в рублях) могут получить предприимчивые друзья?

Решение:

первому будет предложено «1000 RUR либо откажись»,
второму будет предложено «2000 RUR либо откажись»,
третьему будет предложено «4000 RUR либо откажись»,
четвертому будет предложено «8000 RUR либо откажись».
Т.е. четвертый может получить 8000 RUR.

Ответ: 8000.

Задача 1.3+

4 друга заметили на улице своего любимого блогера Григория Илидругому. В своем шоу Григорий предлагает случайным прохожим определенную сумму денег. Если прохожий отказывается, то блогер предложит следующему прохожему в 2 раза больше. Друзья увидели, как неизвестный отказался от суммы в 200 рублей, и решили воспользоваться моментом. По плану все друзья будут по очереди подходить к блогеру, увеличивая сумму, а последний заберет все деньги. Какой максимальный выигрыш (в рублях) могут получить предприимчивые друзья?

Решение:

первому будет предложено «400 RUR либо откажись»,
второму будет предложено «800 RUR либо откажись»,

третьему будет предложено «1600 RUR либо откажись»,
четвертому будет предложено «3200 RUR либо откажись».
Т.е. четвертый может получить 3200 RUR.

Ответ: 3200.

Задача 1.4

Пекарня "Хлебобулочная база" планирует провести акцию "Скидка на все - 20%", чтобы привлечь больше клиентов. В таблице приведены цены на ассортимент пекарни без учета скидки. За сколько рублей можно будет купить "Славянскую булку" по акции?

Название продукта	Цена
Пышка древних русов	100 рублей
Славянская булка	120 рублей
Гиперборейский батон	150 рублей
Хлеб богатырский	200 рублей

Решение:

Из таблицы видим, что цена на "Славянскую булку" без учета скидки - 120 рублей.
Тогда цена со скидкой:
 $120 \text{ рублей} * (100 \% - 20 \%) = 96 \text{ рублей.}$

Ответ: 96.

Задача 1.4+

Пекарня "Хлебобулочная база" планирует провести акцию "Скидка на все - 20%", чтобы привлечь больше клиентов. В таблице приведены цены на ассортимент пекарни без учета скидки. За сколько рублей можно будет купить "Гиперборейский батон" по акции?

Название продукта	Цена
Пышка древних русов	100 рублей
Славянская булка	120 рублей
Гиперборейский батон	150 рублей
Хлеб богатырский	200 рублей

Решение:

Из таблицы видим, что цена на “Гиперборейский батон” без учета скидки - 150 рублей. Тогда цена со скидкой:
 $150 \text{ рублей} * (100 \% - 20 \%) = 120 \text{ рублей}.$

Ответ: 120.

Задача 1.5

Антон собрался в поездку на автомобиле и хочет рассчитать необходимое количество топлива. Расстояние до места назначения составляет 800 км. Сколько литров топлива потребуется Антону для поездки туда и обратно, если его автомобиль потребляет 8 литров на 100 км?

Решение:

Суммарное расстояние, которое пройдет автомобиль туда и обратно –
 $800 \text{ км} * 2 = 1600 \text{ км}.$

Антону потребуется $\frac{1600 \text{ км}}{100 \text{ км}} \times 8 \text{ литров} = 128 \text{ литров}.$

Ответ: 128.

Задача 1.5+

Антон собрался в поездку на автомобиле и хочет рассчитать необходимое количество топлива. Расстояние до места назначения составляет 800 км. Сколько литров топлива потребуется Антону для поездки туда и обратно, если его автомобиль потребляет 7 литров на 100 км?

Решение:

Суммарное расстояние, которое пройдет автомобиль туда и обратно –
 $800 \text{ км} * 2 = 1600 \text{ км}.$

Антону потребуется $\frac{1600 \text{ км}}{100 \text{ км}} \times 7 \text{ литров} = 112 \text{ литров}.$

Ответ: 112.

Блок задач №2

Задача 2.1

Антон играет в популярную игру Sarybara Combat. Суть игры заключается в том, чтобы нажимать или, как еще говорят, тапать (от английского "tap" – постукивать) на изображение капибары в мобильном приложении. За каждое нажатие Антон получает 11 внутриигровых монет. В игре можно сделать не более одного нажатия на капибару за 3 секунды. Антон тапал на капибару по 3 часа в день на протяжении недели (насколько это полезная трата времени, обсуждать не будем). Какое максимальное количество монет он мог получить за это время?

Решение:

Найдем количество секунд, в течение которых тапал Антон:

$$7 * 3 * 60 * 60 = 75600.$$

Антон получит максимальное количество монет, если нажимает ровно 1 раз в 3 секунды, тогда число нажатий равно

$$75600 / 3 = 25200.$$

За каждое нажатие Антон получает 11 монет, значит, всего количество полученных монет:
 $25200 * 11 = 277200.$

Ответ: 277200

Задача 2.1+

Антон играет в популярную игру Sarybara Combat. Суть игры заключается в том, чтобы нажимать или, как еще говорят, тапать (от английского "tap" – постукивать) на изображение капибары в мобильном приложении. За каждое нажатие Антон получает 11 внутриигровых монет. В игре можно сделать не более одного нажатия на капибару за 2 секунды. Антон тапал на капибару по 3 часа в день на протяжении недели (насколько это полезная трата времени, обсуждать не будем). Какое максимальное количество монет он мог получить за это время?

Решение:

Найдем количество секунд, в течение которых тапал Антон:

$$7 * 3 * 60 * 60 = 75600.$$

Антон получит максимальное количество монет, если нажимает ровно 1 раз в 2 секунды, тогда число нажатий равно

$$75600 / 2 = 37800.$$

За каждое нажатие Антон получает 11 монет, значит, всего количество полученных монет:
 $37800 * 11 = 415800.$

Ответ: 415800

Задача 2.2

Антон решил покататься на самокатах, используя приложение для их аренды. По условиям аренды для старта поездки на самокате нужно заплатить 50 рублей. Далее каждая минута поездки стоит 9 рублей. За поездку Антон потратил 406 рублей. Сколько минут он катался, если за время поездки 1 раз ему пришлось сменить самокат?

Решение:

Антон 1 раз сменил самокат в дороге, а значит, он заплатил дважды за старт:

$$50 * 2 = 100 \text{ рублей.}$$

Пусть x - количество минут, которые катался Антон. Тогда по условию можно составить уравнение:

$$100 + 9 * x = 406$$

$$9 * x = 306$$

$$x = 306 / 9 = 34.$$

Ответ: 34

Задача 2.2+

Антон решил покататься на самокатах, используя приложение для их аренды. По условиям аренды для старта поездки на самокате нужно заплатить 50 рублей. Далее каждая минута поездки стоит 6 рублей. За поездку Антон потратил 406 рублей. Сколько минут он катался, если за время поездки 1 раз ему пришлось сменить самокат?

Решение:

Антон 1 раз сменил самокат в дороге, а значит, он заплатил дважды за старт:

$$50 * 2 = 100 \text{ рублей.}$$

Пусть x - количество минут, которые катался Антон. Тогда по условию можно составить уравнение:

$$100 + 6 * x = 406$$

$$6 * x = 306$$

$$x = 306 / 6 = 51.$$

Ответ: 51

Задача 2.3

Фирменный напиток сети кафе «У Иваныча» состоит из чая, сиропа и молока. Его изготавливают строго по заданному рецепту:

одна порция (500 мл) напитка должна содержать 50% чая, 30% сиропа, 20% молока (все проценты – по объему).

В начале дня работники кафе выяснили, что на складе есть 10 л молока, и хватает чайных листьев для приготовления 25 л чая. Какой объем сиропа в литрах потребуется для приготовления напитка из всего чая и молока, имеющихся на складе? При необходимости округлите ответ до десятых. Считайте, что при смешивании компонент суммарный объем смеси равен сумме объемов компонент.

Решение:

Для приготовления одной порции напитка потребуется:

$$500 \text{ мл} * 50\% = 250 \text{ мл чая}$$

$$500 \text{ мл} * 20\% = 100 \text{ мл молока}$$

$$500 \text{ мл} * 30\% = 150 \text{ мл сиропа.}$$

Чая хватит на $25\ 000 \text{ мл} / 250 \text{ мл} = 100$ порций.

Молока хватит на $10\ 000 \text{ мл} / 100 \text{ мл} = 100$ порций.

Таким образом, можно изготовить 100 порций напитка, для этого потребуется

$$150 \text{ мл} * 100 = 15000 \text{ мл} = 15 \text{ л сиропа.}$$

Ответ: 15

Задача 2.3+

Фирменный напиток сети кафе «У Иваныча» состоит из чая, сиропа и молока. Его изготавливают строго по заданному рецепту:

одна порция (500 мл) напитка должна содержать 50% чая, 30% сиропа, 20% молока (все проценты – по объему).

В начале дня работники кафе выяснили, что на складе есть 12 л молока, и хватает чайных листьев для приготовления 30 л чая. Какой объем сиропа в литрах потребуется для приготовления напитка из всего чая и молока, имеющихся на складе? При необходимости округлите ответ до десятых. Считайте, что при смешивании компонент суммарный объем смеси равен сумме объемов компонент.

Решение:

Для приготовления одной порции напитка потребуется:

$$500 \text{ мл} * 50\% = 250 \text{ мл чая}$$

$$500 \text{ мл} * 20\% = 100 \text{ мл молока}$$

$$500 \text{ мл} * 30\% = 150 \text{ мл сиропа.}$$

Чая хватит на $30\ 000 \text{ мл} / 250 \text{ мл} = 120$ порций.

Молока хватит на $12\ 000 \text{ мл} / 100 \text{ мл} = 120$ порций.

Таким образом, можно изготовить 100 порций напитка, для этого потребуется

$$150 \text{ мл} * 120 = 18000 \text{ мл} = 18 \text{ л сиропа.}$$

Ответ: 18

Задача 2.4

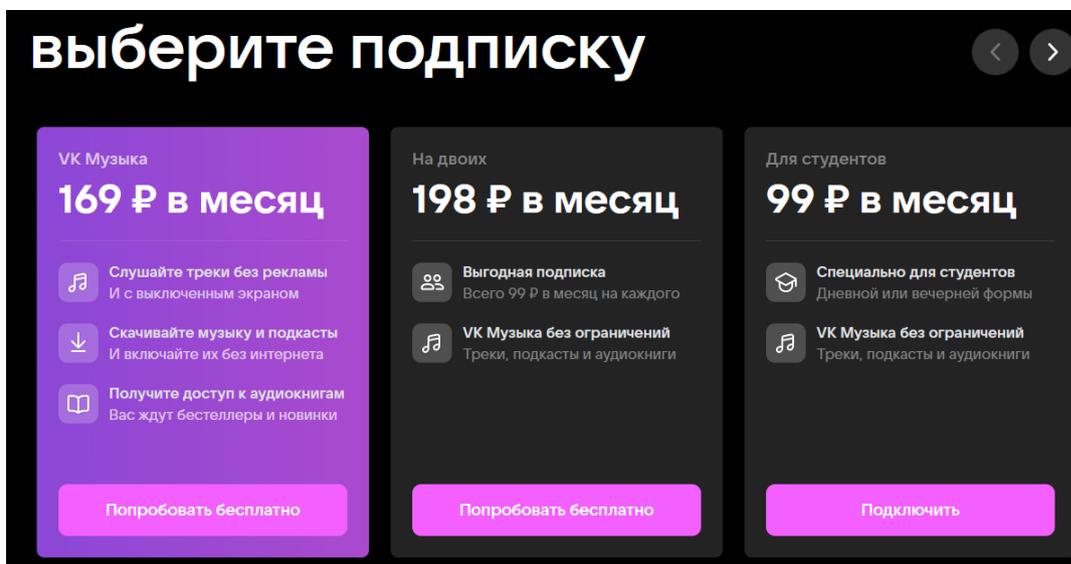
Три друга-студента решили каждый оформить подписку на 6 месяцев VK Музыки так, чтобы минимизировать суммарные расходы.

В VK Музыке им подходит три вида подписки:

1. “Классическая” - первый месяц бесплатно, а затем 169 рублей в месяц.
2. “На двоих” - первый месяц бесплатно, а затем 198 рублей в месяц за двух человек.
3. “Для студентов” - 99 рублей в месяц, начиная с первого месяца.

При этом каждый из них хочет выбрать себе вид подписки один раз и дальше в течение 6 месяцев уже не менять. Чему будет равна минимальная сумма затрат на троих за 6 месяцев, если друзья рассчитают все правильно?

Ответ укажите в рублях.



Решение:

Найдем сумму, которую нужно уплатить за использование каждого из предложений в течение 6 месяцев:

1. “Классическая”: 1 месяц бесплатно + 5 месяцев * 169 руб./ мес. = 845 рублей.
2. “На двоих”: - 1 месяц бесплатно + 5 месяцев * 198 руб./ мес. = 990 рублей, это по 495 рублей на каждого из двоих пользователей.
3. “Студенческая” - 6 месяцев * 99 руб./ мес. = 594 рубля.

Заметим, что самая выгодная подписка - “На двоих”, но ее удастся использовать лишь один раз в отношении двух друзей. Тогда третьему другу выгоднее использовать подписку “Студенческая”. Суммарно друзья потратят за 6 месяцев:

990 рублей + 594 рубля = 1584 рубля.

Ответ: 1584.

Задача 2.4+

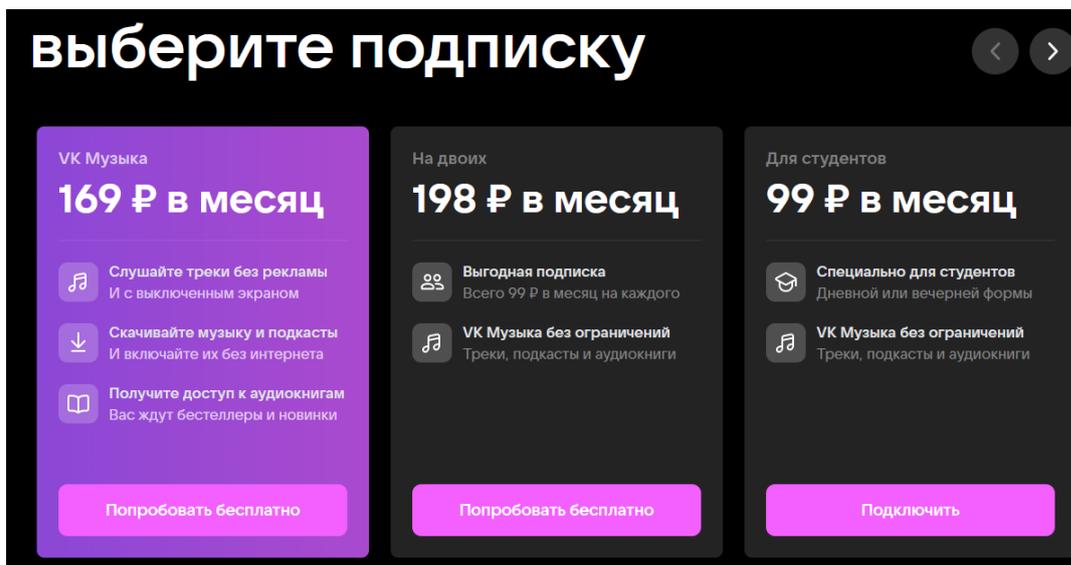
Три друга-студента решили каждый оформить подписку на 5 месяцев VK Музыки так, чтобы минимизировать суммарные расходы.

В VK Музыке им подходит три вида подписки:

4. “Классическая” - первый месяц бесплатно, а затем 169 рублей в месяц.
5. “На двоих” - первый месяц бесплатно, а затем 198 рублей в месяц за двух человек.
6. “Для студентов” - 99 рублей в месяц, начиная с первого месяца.

При этом каждый из них хочет выбрать себе вид подписки один раз и дальше в течение 5 месяцев уже не менять. Чему будет равна минимальная сумма затрат на троих за 5 месяцев, если друзья рассчитают все правильно?

Ответ укажите в рублях.



Решение:

Найдем сумму, которую нужно уплатить за использование каждого из предложений в течение 6 месяцев:

4. “Классическая”: 1 месяц бесплатно + 4 месяца * 169 руб./ мес. = 676 рублей.
5. “На двоих”: - 1 месяц бесплатно + 4 месяца * 198 руб./ мес. = 792 рубля, это по 396 рублей на каждого из двоих пользователей.
6. “Студенческая” - 5 месяцев * 99 руб./ мес. = 495 рублей.

Заметим, что самая выгодная подписка - “На двоих”, но ее удастся использовать лишь один раз в отношении двух друзей. Тогда третьему другу выгоднее использовать подписку “Студенческая”. Суммарно друзья потратят за 5 месяцев:

792 рубля + 495 рублей = 1287 рублей.

Ответ: 1287.

Задача 2.5

Петя — молодой разработчик, студент игрового направления разработки. Он прошел в проект для поддержки студенческих команд «VK Play Лабораторию». Помимо него в сезон попали еще 23 команды, каждая со своей игрой. В среднем в игру каждой команды играет 400 человек в день по будням и 520 человек в день по выходным. Игроки оставляют отзывы и каждый день каждая игра получает новые отзывы в размере 1/40 от количества человек, игравших в неё в этот день. Определите, сколько отзывов будет суммарно у всех игр спустя неделю после публикации.

Решение:

Исходя из условия, каждый будний день игра будет получать $400 / 40 = 10$ новых отзывов, а по выходным – $520 / 40 = 13$ отзывов в день. Тогда за неделю одна игра получит $10 * 5 + 13 * 2 = 76$ отзывов, а все игры – $76 * 24 = 1824$ отзыва.

Ответ: 1824.

Задача 2.5+

Петя — молодой разработчик, студент игрового направления разработки. Он прошел в проект для поддержки студенческих команд «VK Play Лабораторию». Помимо него в сезон попали еще 23 команды, каждая со своей игрой. В среднем в игру каждой команды играет 400 человек в день по будням и 560 человек в день по выходным. Игроки оставляют отзывы и каждый день каждая игра получает новые отзывы в размере $1/40$ от количества человек, игравших в неё в этот день. Определите, сколько отзывов будет суммарно у всех игр спустя неделю после публикации.

Решение:

Исходя из условия, каждый будний день игра будет получать $400 / 40 = 10$ новых отзывов, а по выходным – $560 / 40 = 14$ отзывов в день. Тогда за неделю одна игра получит $10 * 5 + 14 * 2 = 78$ отзывов, а все игры – $78 * 24 = 1872$ отзыва.

Ответ: 1824.

Блок задач №3

Задача 3.1

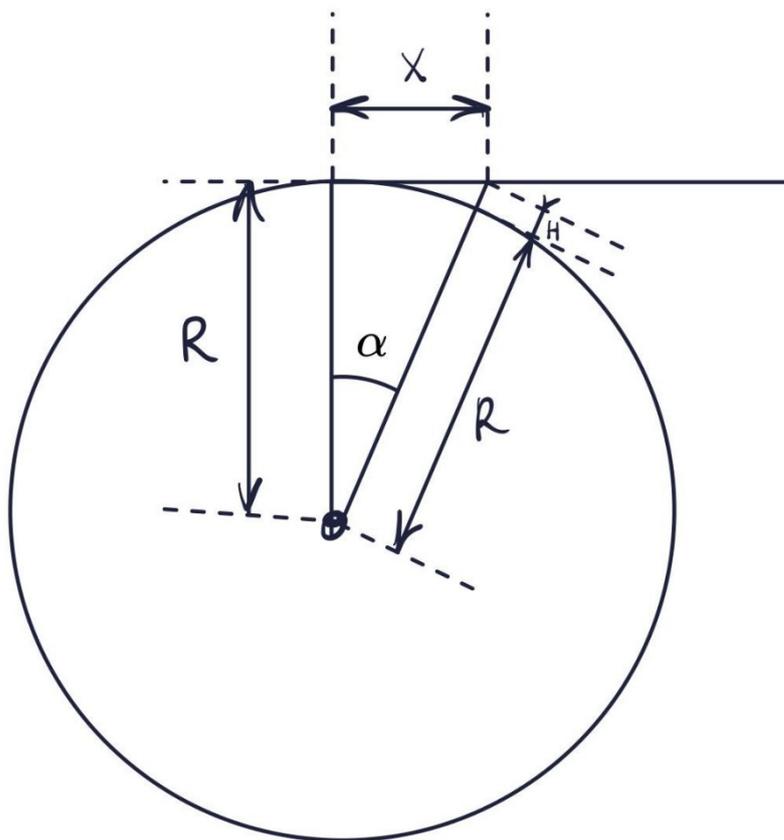
Сообщество плоскоземельщиков уверено, что на самом деле планета Земля плоская, а теория шарообразной Земли – заговор коварных ученых. Чтобы доказать свою правоту, плоскоземельщики решили провести такой эксперимент:

наблюдатель лежит на берегу моря и смотрит на уплывающий вдаль корабль, пользуясь биноклем. На корабле, на высоте $H = 60$ м над уровнем моря закреплен красный флаг.

Плоскоземельщики уверены, что флаг никогда не скроется за горизонтом.

Коварные ученые узнали об этом и решили помешать эксперименту. На каком расстоянии от берега X ученые должны полностью скрыть флаг из виду, чтобы результат эксперимента совпал с теорией шарообразной Земли? Согласно теории шарообразной Земли, ее радиус $R = 6378$ км. Учитывать преломление света в атмосфере не нужно.

Ответ укажите в километрах, округлив его до целого.



Решение:

В случае шарообразной Земли флаг должен скрыться за горизонтом из-за искривления поверхности Земли (см. рис.).

Будем считать приблизительно равными длину искомой дуги и длины катета на рисунке («гипотеза 1»). Тогда расстояние можно найти из теоремы Пифагора:

$$X = \sqrt{(R + H)^2 - R^2} = \sqrt{2RH + H^2} = \sqrt{2 * 6378 * 0,06 + 0,06^2} \approx 28 \text{ км}$$

Т.к. $X \ll R$, то «гипотеза 1» верна.

Ответ: 28

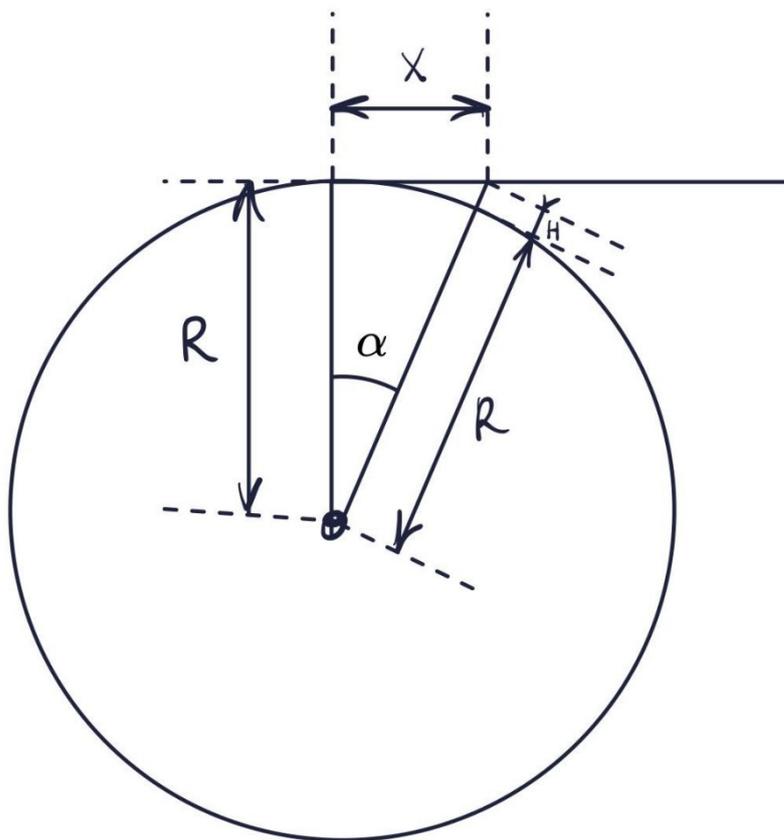
Задача 3.1+

Сообщество плоскоземельщиков уверено, что на самом деле планета Земля плоская, а теория шарообразной Земли – заговор коварных ученых. Чтобы доказать свою правоту, плоскоземельщики решили провести такой эксперимент:

наблюдатель лежит на берегу моря и смотрит на уплывающий вдаль корабль, пользуясь биноклем. На корабле, на высоте $H = 50$ м над уровнем моря закреплен красный флаг. Плоскоземельщики уверены, что флаг никогда не скроется за горизонтом.

Коварные ученые узнали об этом и решили помешать эксперименту. На каком расстоянии от берега X ученые должны полностью скрыть флаг из виду, чтобы результат эксперимента совпал с теорией шарообразной Земли? Согласно теории шарообразной Земли, ее радиус $R = 6378$ км. Учитывать преломление света в атмосфере не нужно.

Ответ укажите в километрах, округлив его до целого.



Решение:

В случае шарообразной Земли флаг должен скрестись за горизонтом из-за искривления поверхности Земли (см. рис.).

Будем считать приблизительно равными длину искомой дуги и длины катета на рисунке («гипотеза 1»). Тогда расстояние можно найти из теоремы Пифагора:

$$X = \sqrt{(R + H)^2 - R^2} = \sqrt{2RH + H^2} = \sqrt{2 * 6378 * 0,05 - 0,05^2} \approx 25 \text{ км}$$

Т.к. $X \ll R$, то «гипотеза 1» верна.

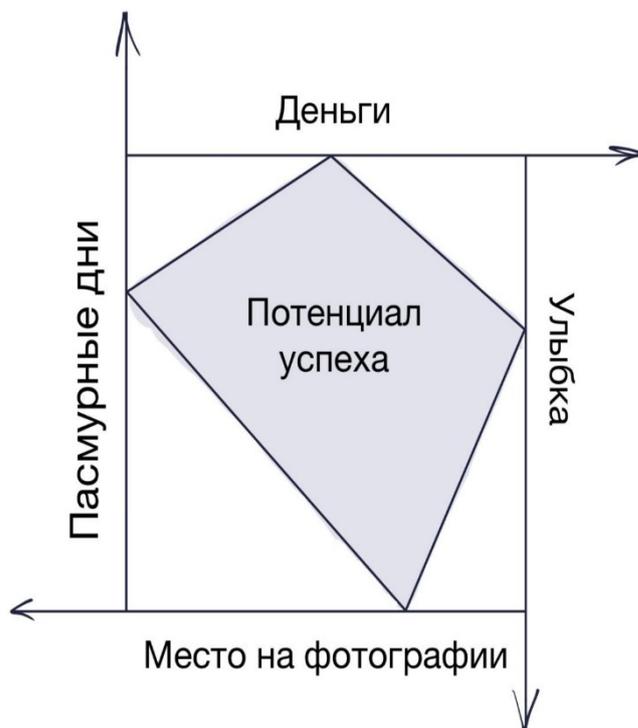
Ответ: 25

Задача 3.2

Гадалка, оценивающая потенциал успеха клиентов по фотографии, решила добавить в свои предсказания математики, чтобы повысить точность и эффективность предсказаний. Во время гадания она оценивает 4 параметра:

1. Долю площади, занимаемой человеком на фотографии.
2. Долю пасмурных дней за прошедший год.
3. Отношение оплаты клиентом к максимальной оплате за карьеру гадалки.
4. Ширину улыбки на фотографии, деленную на ширину лица.

Каждый из параметров - число от 0 до 1, которое отмечается на отдельной стороне квадрата 1 на 1. Далее гадалка считает площадь полученного таким образом четырехугольника (см рисунок), которую и называет "Потенциалом успеха."



Гадалка оценила параметры одного из клиентов следующим образом:

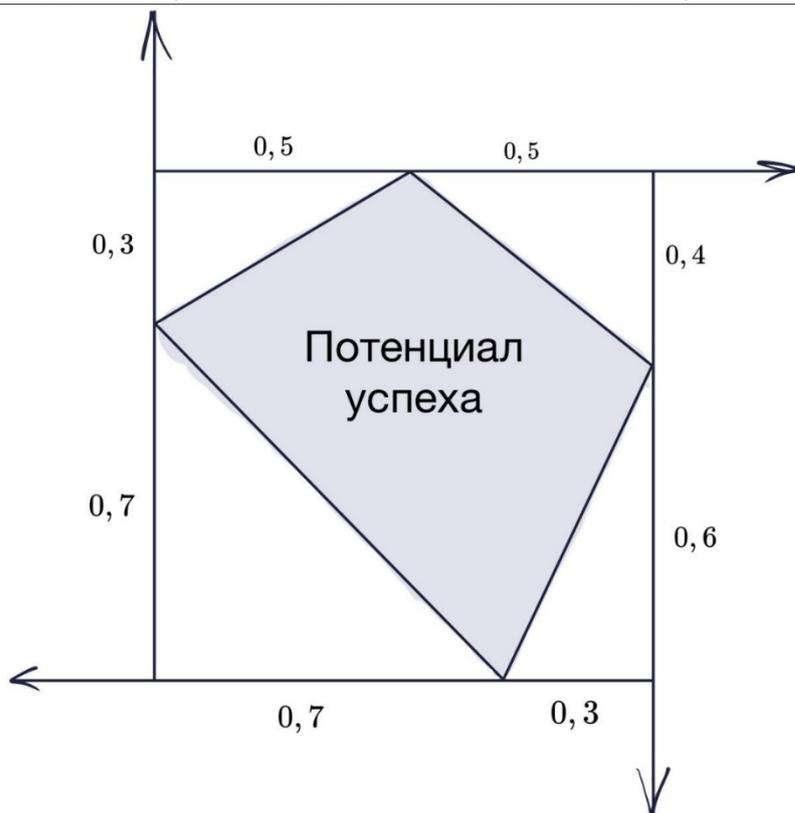
1. 0,3
2. 0,7
3. 0,5
4. 0,4

Каким потенциалом обладает такой клиент, по ее мнению?

Ответ укажите в виде десятичной дроби, при необходимости округлив его до сотых.

Решение:

Квадрат, полученный гадалкой, изображен на рисунке.



Для поиска потенциала успеха можно вычесть из общей площади квадрата площади четырех прямоугольных треугольников. Площадь квадрата $S_0 = 1 * 1 = 1$.

Площадь каждого треугольника найдем по формуле: $S = a * b / 2$, где a и b - катеты прямоугольного треугольника:

1. Треугольник "Места и погоды" $S_1 = 0,7 * 0,7 / 2 = 0,245$.
 2. Треугольник "Погоды и денег" $S_2 = 0,3 * 0,5 / 2 = 0,075$.
 3. Треугольник "Денег и улыбки" $S_3 = 0,5 * 0,4 / 2 = 0,1$.
 4. Треугольник "Улыбки и места" $S_4 = 0,6 * 0,3 / 2 = 0,09$.
- $$S_0 - S_1 - S_2 - S_3 - S_4 = 1 - 0,245 - 0,075 - 0,1 - 0,09 = 0,49$$

Ответ: 0,49.

Задача 3.2+

Гадалка, оценивающая потенциал успеха клиентов по фотографии, решила добавить в свои предсказания математики, чтобы повысить точность и эффектность предсказаний. Во время гадания она оценивает 4 параметра:

1. Долю площади, занимаемой человеком на фотографии.
2. Долю пасмурных дней за прошедший год.

3. Отношение оплаты клиентом к максимальной оплате за карьеру гадалки.
4. Ширину улыбки на фотографии, деленную на ширину лица.

Каждый из параметров - число от 0 до 1, которое отмечается на отдельной стороне квадрата 1 на 1. Далее гадалка считает периметр полученного таким образом четырехугольника (см рисунок), который и называет "Потенциалом успеха."



Гадалка оценила параметры одного из клиентов следующим образом:

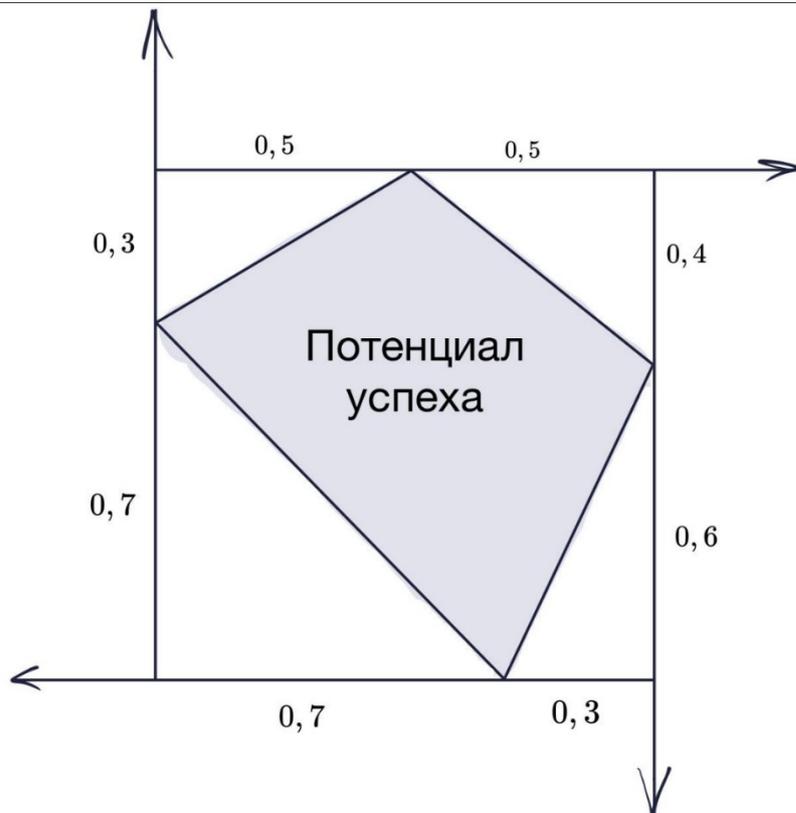
1. 0,3
2. 0,7
3. 0,5
4. 0,4

Каким потенциалом обладает такой клиент, по ее мнению?

Ответ укажите в виде десятичной дроби, при необходимости округлив его до сотых.

Решение:

Квадрат, полученный гадалкой, изображен на рисунке.



Для поиска потенциала успеха нужно вычислить по теореме Пифагора гипотенузы каждого из треугольников:

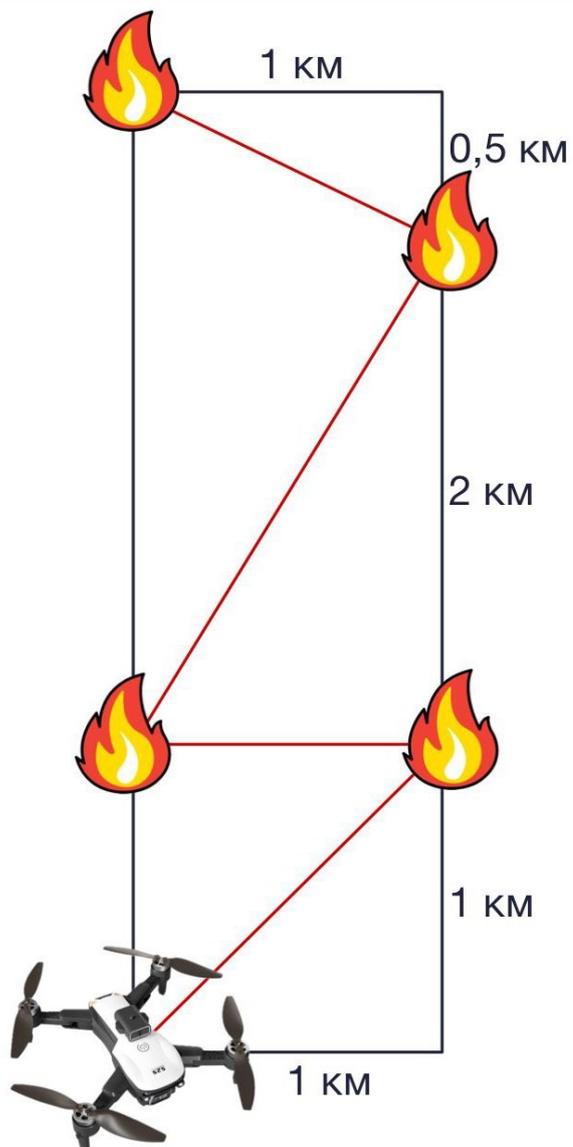
5. Треугольник “Места и погоды” : $L_1 = \sqrt{0,7^2 + 0,7^2} = 0,99$
6. Треугольник “Погоды и денег” $L_2 = \sqrt{0,3^2 + 0,5^2} = 0,58$
7. Треугольник “Денег и улыбки” $L_3 = \sqrt{0,5^2 + 0,4^2} = 0,64$
8. Треугольник “Улыбки и места” $L_4 = \sqrt{0,6^2 + 0,3^2} = 0,67$

Тогда $P = L_1 + L_2 + L_3 + L_4 = 2,88$

Ответ: 2,88.

Задача 3.3

Пожарный дрон во время тушения лесного пожара пролетел по лесу путь, изображенный на рисунке. Сколько процентов заряда останется у дрона в конце пути, если известно, что начал он путь с зарядом на уровне 100%, максимальная дальность полета дрона — 10 км, и за равные пройденные расстояния дрон тратит равное количество энергии? Ответ укажите в процентах, при необходимости округлив до целого числа. В промежуточных вычислениях результаты округляйте до сотых долей километра.



Решение:

Найдем весь путь, который прошел дрон:

$$S_1 = \sqrt{1^2 + 1^2} \text{ км} = \sqrt{2} \text{ км}$$

$$S_2 = 1 \text{ км}$$

$$S_3 = \sqrt{1^2 + 2^2} \text{ км} = \sqrt{5} \text{ км}$$

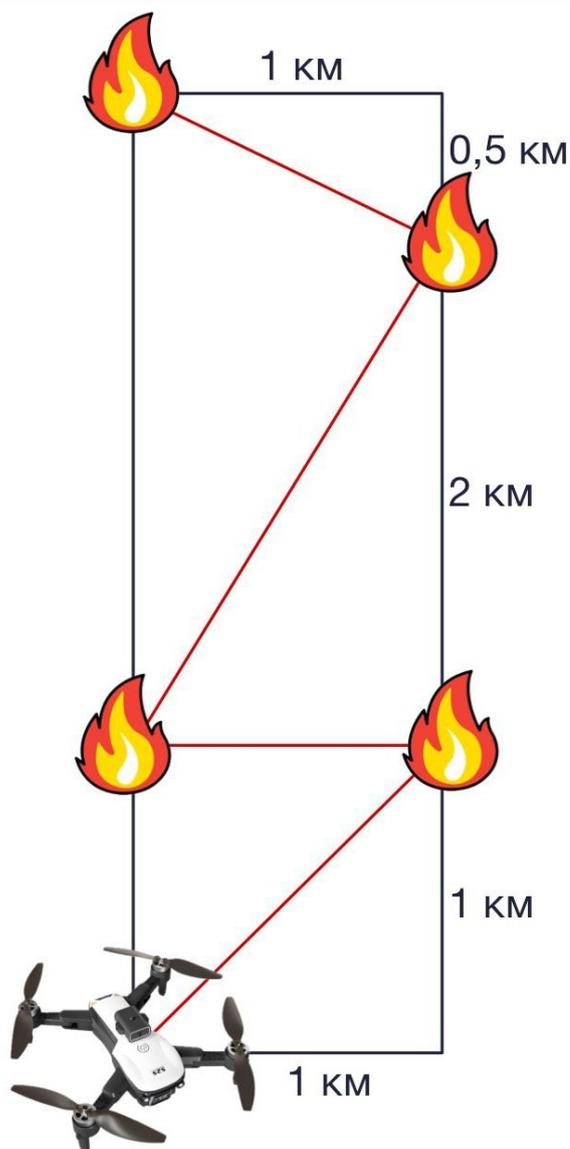
$$S_4 = \sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} \text{ км} = \sqrt{\frac{5}{4}} \text{ км}$$

$$S_{\text{общ}} = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 \approx 1,41 \text{ км} + 1,00 \text{ км} + 2,24 \text{ км} + 1,12 \text{ км} = 5,77 \text{ км}.$$

Так как 5,77 км – это 57,7 % от 10 км, то дрон израсходует за полет 57,7 % заряда.
Значит, в конце пути у дрона останется $100\% - 57,7\% = 42,3\% \approx 42\%$.
Ответ: 42

Задача 3.3+

Пожарный дрон во время тушения лесного пожара пролетел по лесу путь, изображенный на рисунке. Сколько процентов заряда останется у дрона в конце пути, если известно, что начал он путь с зарядом на уровне 100%, максимальная дальность полета дрона — 12 км, и за равные пройденные расстояния дрон тратит равное количество энергии? Ответ укажите в процентах, при необходимости округлив до целого числа. В промежуточных вычислениях результаты округляйте до сотых долей километра.



Решение:

Найдем весь путь, который прошел дрон:

$$\begin{aligned}S_1 &= \sqrt{1^2 + 1^2} \text{ км} = \sqrt{2} \text{ км} \\S_2 &= 1 \text{ км} \\S_3 &= \sqrt{1^2 + 2^2} \text{ км} = \sqrt{5} \text{ км} \\S_4 &= \sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} \text{ км} = \sqrt{\frac{5}{4}} \text{ км}\end{aligned}$$

$$S_{\text{общ}} = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 \approx 1,41 \text{ км} + 1,00 \text{ км} + 2,24 \text{ км} + 1,12 \text{ км} = 5,77 \text{ км}.$$

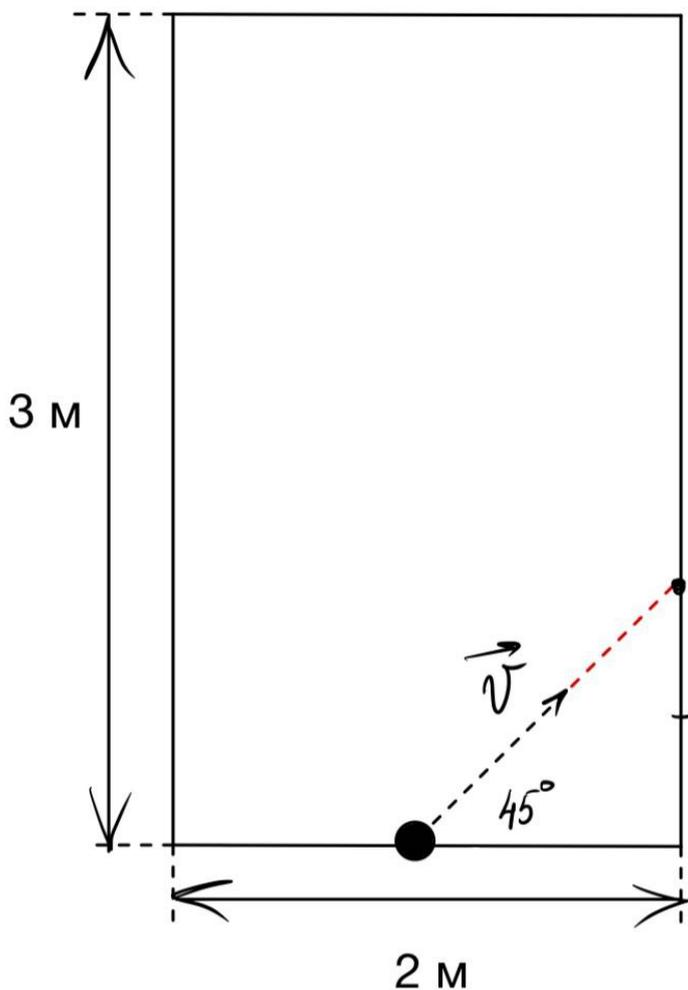
Так как 5,77 км – это 48,1 % от 12 км, то дрон израсходует за полет 48,1 % заряда. Значит, в конце пути у дрона останется 100% - 48,1 % = 51,9 % \approx 52 %.

Ответ: 52

Задача 3.4

Аэрохоккей – настольный вид спорта, схожий с обычным хоккеем: цель – забить шайбу в ворота противника и не дать забить в свои. Но игроков всего двое, а стоят они по разные стороны прямоугольного стола, каждый - у своих ворот.

Антон играет на прямоугольном столе для аэрохоккея с размерами 2 на 3 метра. Он подтолкнул шайбу под углом 45 градусов к борту, как показано на рисунке, с начальной скоростью 20 км/ч. При ударе о борт скорость шайбы сохраняется, а направление движения меняется так, что углы между направлением скорости и бортом равны при ударе и отскоке. С какой скоростью шайба ударится о противоположный край стола, если за каждый метр пути она теряет в скорости 1 км/ч? Ответ укажите в км/ч, при необходимости округлив его до сотых. Вначале шайба находится у середины короткого борта.



Решение:

Найдем путь, который пройдет шайба до противоположного края. Так как сначала шайбу толкнули под углом 45 градусов, и при ударе о борт данный угол сохраняется, то перемещения шайбы по горизонтали и по вертикали равны. Траектория шайбы изображена на рисунке. Чтобы достигнуть противоположного конца стола, шайба должна пройти 3 м по вертикали, а значит, столько же и по горизонтали.

Треугольники ABC и EDC прямоугольные и равнобедренные, как прямоугольные с углом 45°. Тогда путь шайбы можно найти как сумму двух гипотенуз, которые найдем по теореме Пифагора:

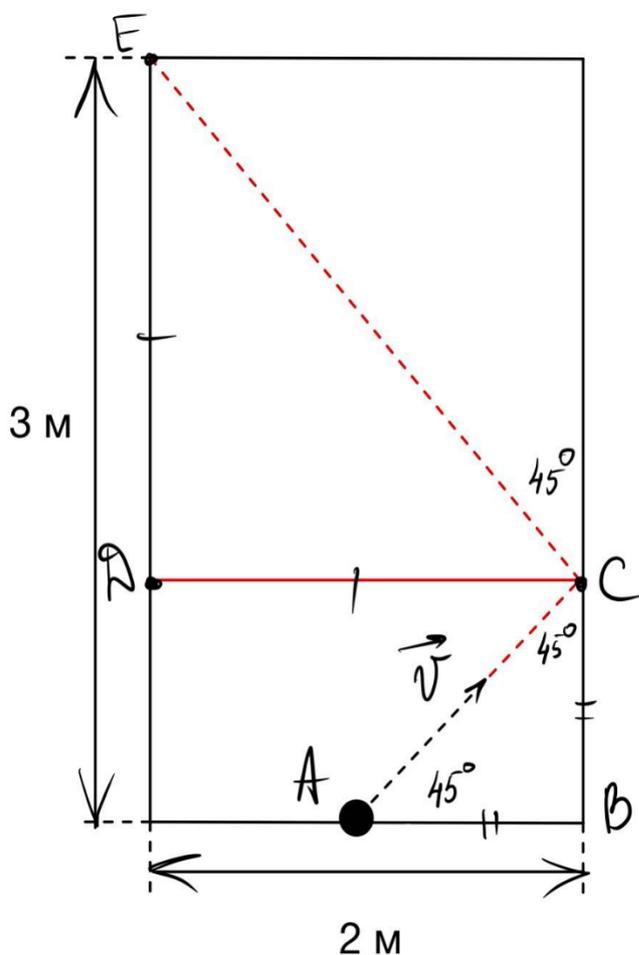
$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$CE = \sqrt{CD^2 + DE^2} = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8}$$

В этом случае путь шайбы равен:

$$AC + CE = \sqrt{2} \text{ м} + \sqrt{8} \text{ м} = \sqrt{2} \text{ м} + 2\sqrt{2} \text{ м} = 3\sqrt{2} \text{ м} \approx 4,24 \text{ м}.$$

Если шайба теряет в скорости 1 км/ч за каждый метр пути, то за время движения скорость шайбы уменьшится до:
 $20 \text{ км/ч} - 4,24 \text{ км/ч} = 15,76 \text{ км/ч}$.

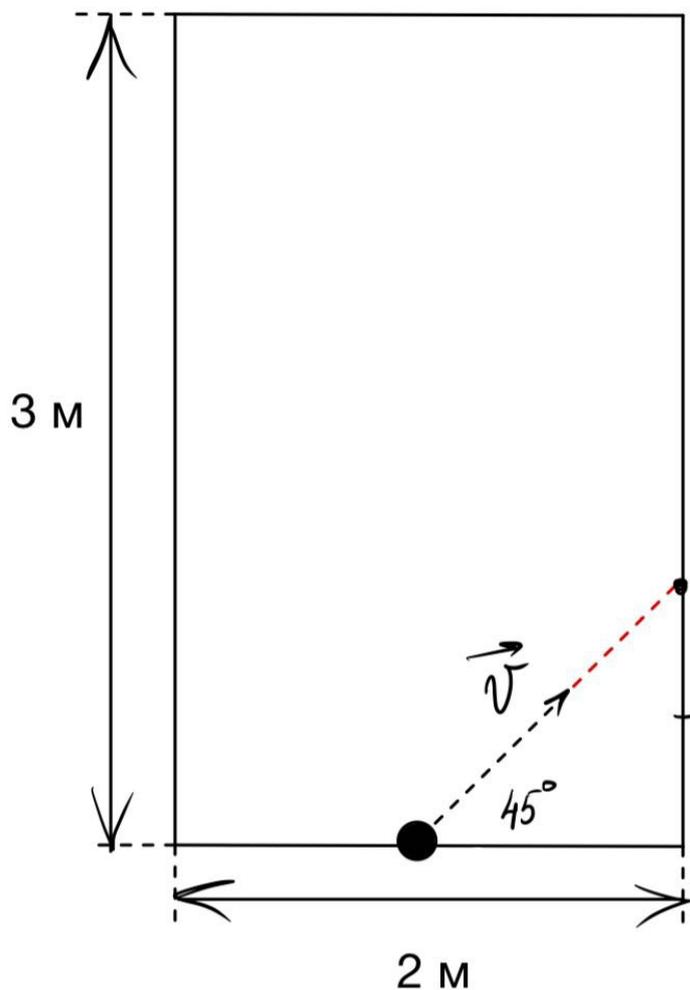


Ответ: 15,76

Задача 3.4+

Аэрохоккей – настольный вид спорта, схожий с обычным хоккеем: цель – забить шайбу в ворота противника и не дать забить в свои. Но игроков всего двое, а стоят они по разные стороны прямоугольного стола, каждый - у своих ворот.

Антон играет на прямоугольном столе для аэрохоккея с размерами 2 на 3 метра. Он подтолкнул шайбу под углом 45 градусов к борту, как показано на рисунке, с начальной скоростью 15 км/ч. При ударе о борт скорость шайбы сохраняется, а направление движения меняется так, что углы между направлением скорости и бортом равны при ударе и отскоке. С какой скоростью шайба ударится о противоположный край стола, если за каждый метр пути она теряет в скорости 1 км/ч? Ответ укажите в км/ч, при необходимости округлив его до сотых. Вначале шайба находится у середины короткого борта.



Решение:

Найдем путь, который пройдет шайба до противоположного края. Так как сначала шайбу толкнули под углом 45 градусов, и при ударе о борт данный угол сохраняется, то перемещения шайбы по горизонтали и по вертикали равны. Траектория шайбы изображена на рисунке. Чтобы достигнуть противоположного конца стола, шайба должна пройти 3 м по вертикали, а значит, столько же и по горизонтали.

Треугольники ABC и EDC прямоугольные и равнобедренные, как прямоугольные с углом 45°. Тогда путь шайбы можно найти как сумму двух гипотенуз, которые найдем по теореме Пифагора:

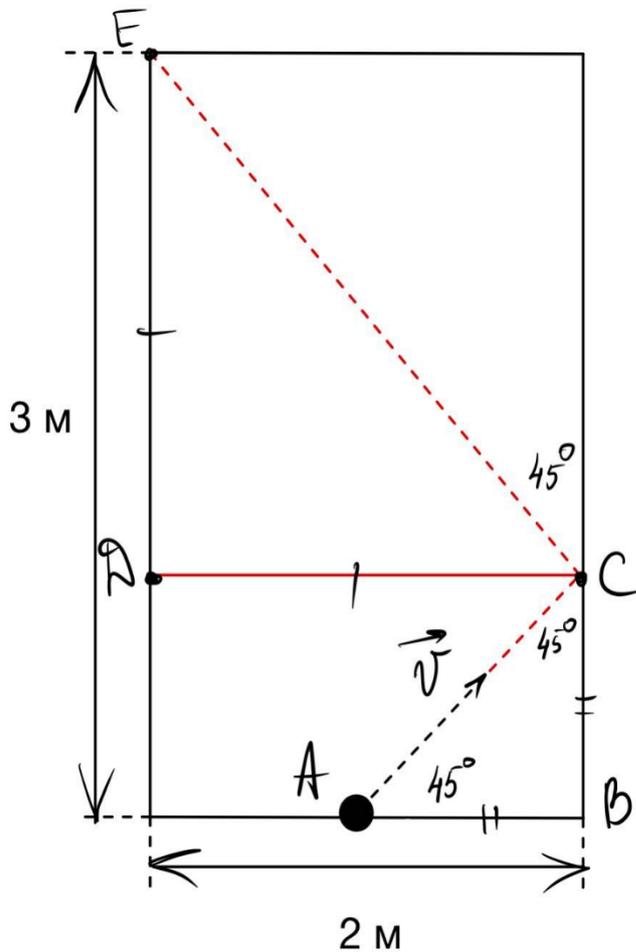
$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$CE = \sqrt{CD^2 + DE^2} = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8}$$

В этом случае путь шайбы равен:

$$AC + CE = \sqrt{2} \text{ м} + \sqrt{8} \text{ м} = \sqrt{2} \text{ м} + 2\sqrt{2} \text{ м} = 3\sqrt{2} \text{ м} \approx 4,24 \text{ м}.$$

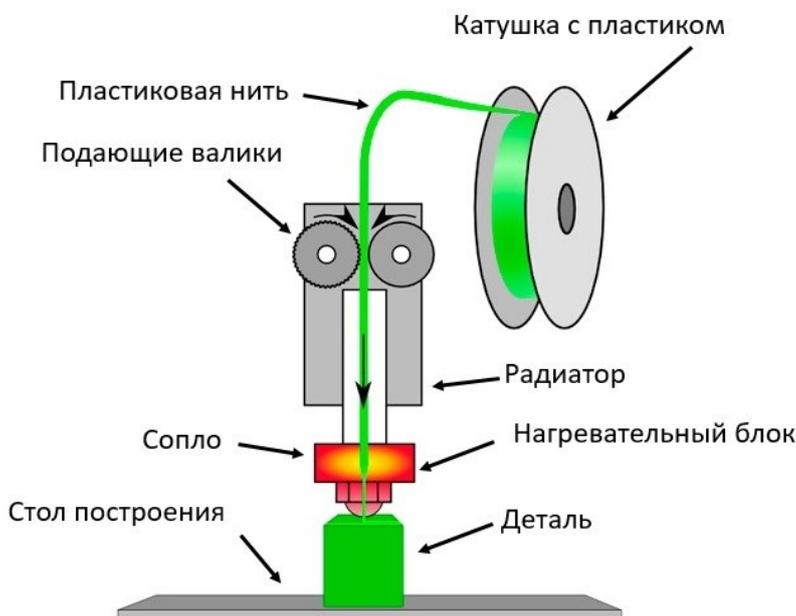
Если шайба теряет в скорости 1 км/ч за каждый метр пути, то за время движения скорость шайбы уменьшится до:
 $15 \text{ км/ч} - 4,24 \text{ км/ч} = 10,76 \text{ км/ч}$.



Ответ: 10,76

Задача 3.5

Существует несколько видов 3D-принтеров, и одни из самых популярных среди них — FDM/FFF принтеры. Эти устройства строят объекты послойно, используя термопластичный материал. Материал поступает в принтер в виде катушки с нитью (филаментом). Принтер расплавляет нить до жидкого состояния и экструдировать её через сопло, нанося слой за слоем на печатную платформу. Процесс повторяется до тех пор, пока объект не будет полностью сформирован.



Используя такой принтер, инженер решил напечатать коробку. Для этого ему нужно распечатать 5 стенок, каждая из которых – плоский квадрат 10 на 10 см толщиной 2 мм. Стенка полностью состоит из материала печати, не имеет пустот. Объем 1 см нити равен $0,04 \text{ см}^3$. Сколько сантиметров нити потребуется инженеру, чтобы напечатать такую коробку? Считайте, что объем пластика не меняется после нагревания и последующего застывания. Ответ дайте в см, при необходимости округлив до целых.

Решение:

Чтобы найти длину нити, которая потребуется для печати, найдем объем материала, который нужен, чтобы напечатать коробку. Такой же объем материала нужно будет взять из мотка для печати.

Суммарный объем стенок найдем, посчитав объем одной стенки и умножив на 5, тогда:

$$V_k = 5 V_{\text{ст}} = 5 a^2 h$$

Здесь $a = 10 \text{ см}$, $h = 2 \text{ мм} = 0,2 \text{ см}$ - толщина стенки.

$$V_k = 5 * 10 * 10 * 0,2 = 100 \text{ см}^3$$

Чтобы найти длину нити, которую придется израсходовать, поделим объем материала, требуемого для печати стенок коробки, на объем 1 см нити:

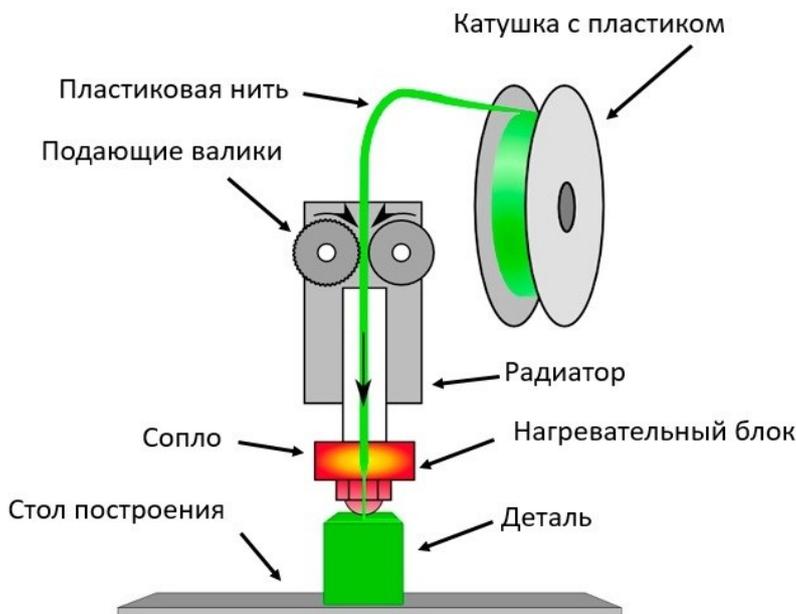
$$100 \text{ см}^3 / 0,04 (\text{см}^3 / \text{см}) = 2500 \text{ см}.$$

Ответ: 2500.

Задача 3.5

Существует несколько видов 3D-принтеров, и одни из самых популярных среди них — FDM/FFF принтеры. Эти устройства строят объекты послойно, используя термопластичный материал. Материал поступает в принтер в виде катушки с нитью

(филаментом). Принтер расплавляет нить до жидкого состояния и экструдирует её через сопло, нанося слой за слоем на печатную платформу. Процесс повторяется до тех пор, пока объект не будет полностью сформирован.



Используя такой принтер, инженер решил напечатать коробку. Для этого ему нужно распечатать 5 стенок, каждая из которых – плоский квадрат 10 на 10 см толщиной 2 мм. Стенка полностью состоит из материала печати, не имеет пустот. Объем 1 см нити равен $0,05 \text{ см}^3$. Сколько сантиметров нити потребуется инженеру, чтобы напечатать такую коробку? Считайте, что объем пластика не меняется после нагревания и последующего застывания. Ответ дайте в см, при необходимости округлив до целых.

Решение:

Чтобы найти длину нити, которая потребуется для печати, найдем объем материала, который нужен, чтобы напечатать коробку. Такой же объем материала нужно будет взять из мотка для печати.

Суммарный объем стенок найдем, посчитав объем одной стенки и умножив на 5, тогда:

$$V_k = 5 V_{\text{ст}} = 5 a^2 h$$

Здесь $a = 10 \text{ см}$, $h = 2 \text{ мм} = 0,2 \text{ см}$ - толщина стенки.

$$V_k = 5 * 10 * 10 * 0,2 = 100 \text{ см}^3$$

Чтобы найти длину нити, которую придется израсходовать, поделим объем материала, требуемого для печати стенок коробки, на объем 1 см нити:

$$100 \text{ см}^3 / 0,05 (\text{см}^3 / \text{см}) = 2000 \text{ см}.$$

Ответ: 2000.

Блок задач №4

Задача 4.1

Поясняющий текст к задаче:

Сейчас всюду применяются языковые модели — нейросети, предназначенная для обработки и генерации текста (например, ChatGPT). При этом для работы с моделью пользователю необходимо купить «токены», которые тратятся на обработку введённого текста и генерацию ответа. При этом количество токенов зависит от количества слов во введённом тексте и в сгенерированном ответе.

Условие задачи:

Компания "Умникс" пользуется языковой моделью ОтветGPT для обработки запросов от своих клиентов. ОтветGPT получает от пользователей запрос по одному и тому же шаблону, эквивалентному 15 токенам. В ответ на запрос ОтветGPT генерирует для клиента коммерческое предложение, его средняя стоимость поначалу была равна N токенов.

В первый месяц ОтветGPT обработал 10000 запросов, на каждый сгенерировав ответ. Во второй месяц размер среднего ответа от ОтветGPT увеличили в 2 раза (стоимость возросла до $2N$), при этом число запросов увеличилось до 12500. Оказалось, что «Умниксу» пришлось заплатить за работу нейросети во второй месяц в 2 раза больше, чем за первый.

Оплата за работу ОтветGPT стоит 1 рубль за 2500 токенов (каждый токен вопроса и каждый токен ответа оплачиваются одинаково). Сколько токенов в среднем содержал ответ пользователю от ОтветGPT в первый месяц работы?

Ответ округлите до целого числа.

Решение:

Обозначим N - средний размер одного ответа от ОтветGPT в токенах, S - сумма, которую оплатил «Умникс» в первый месяц.

Для оплаты за первый месяц получим уравнение:

$S = (15 \text{ (токенов в одном запросе)} + N \text{ (токенов в одном ответе)}) * 10000 \text{ (запросов в первый месяц)} * (1 / 2500) \text{ (рублей за 1 токен)}$.

Для второго месяца:

$2S = (15 \text{ (токенов в одном запросе)} + 2 * N \text{ (токенов в одном ответе)}) * 12500 \text{ (запросов во второй месяц)} * (1 / 2500) \text{ (рублей за 1 токен)}$.

Решим полученную систему:

$$\begin{cases} S = (15 + N) * 10000 * \frac{1}{2500} \\ 2S = (15 + 2N) * 12500 * \frac{1}{2500} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2S = (15 + N) * 8 \\ 2S = (15 + 2N) * 5 \end{cases}$$

$$(15 + N) * 8 = (15 + 2N) * 5$$

$$120 + 8N = 75 + 10N$$

$$N = 22,5 \approx 23$$

Ответ: 23

Задача 4.1+

Поясняющий текст к задаче:

Сейчас всюду применяются языковые модели — нейросети, предназначенная для обработки и генерации текста (например, ChatGPT). При этом для работы с моделью пользователю необходимо купить «токены», которые тратятся на обработку введенного текста и генерацию ответа. При этом количество токенов зависит от количества слов во введенном тексте и в сгенерированном ответе.

Условие задачи:

Компания "Умникс" пользуется языковой моделью ОтветGPT для обработки запросов от своих клиентов. ОтветGPT получает от пользователей запрос по одному и тому же шаблону, эквивалентному 15 токенам. В ответ на запрос ОтветGPT генерирует для клиента коммерческое предложение, его средняя стоимость поначалу была равна N токенов.

В первый месяц ОтветGPT обработал 10000 запросов, на каждый сгенерировав ответ. Во второй месяц размер среднего ответа от ОтветGPT увеличили в 2 раза (стоимость возросла до $2N$), при этом число запросов увеличилось до 15000. Оказалось, что «Умниксу» пришлось заплатить за работу нейросети во второй месяц в 2 раза больше, чем за первый.

Оплата за работу ОтветGPT стоит 1 рубль за 2500 токенов (каждый токен вопроса и каждый токен ответа оплачиваются одинаково). Сколько токенов в среднем содержал ответ пользователю от ОтветGPT в первый месяц работы?

Ответ округлите до целого числа.

Решение:

Обозначим N - средний размер одного ответа от ОтветGPT в токенах, S - сумма, которую оплатил «Умникс» в первый месяц.

Для оплаты за первый месяц получим уравнение:

$S = (15 \text{ (токенов в одном запросе)} + N \text{ (токенов в одном ответе)}) * 10000 \text{ (запросов в первый месяц)} * (1 / 2500) \text{ (рублей за 1 токен)}$.

Для второго месяца:

$2S = (15 \text{ (токенов в одном запросе)} + 2 * N \text{ (токенов в одном ответе)}) * 15000 \text{ (запросов во второй месяц)} * (1 / 2500) \text{ (рублей за 1 токен)}$.

Решим полученную систему:

$$\begin{cases} S = (15 + N) * 10000 * \frac{1}{2500} \\ 2S = (15 + 2N) * 15000 * \frac{1}{2500} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2S = (15 + N) * 8 \\ 2S = (15 + 2N) * 6 \end{cases}$$

$$(15 + N) * 8 = (15 + 2N) * 6$$

$$120 + 8N = 90 + 12N$$

$$N = 7,5 \approx 8$$

Ответ: 8

Задача 4.2

В аниме и манге "Магическая битва" сильнейший маг современности Сатору Годжо пользуется защитной техникой бесконечности. Автор не объясняет явным образом принципа работы техники, но утверждает, что она работает по принципу "Ахиллеса и черепахи". Предположим, что техника работает на расстоянии 1 метр перед пользователем. При приближении к пользователю на x (в пределах этого расстояния) расстояние, оставшееся до пользователя, увеличивается на $(4 / 5) x$. Какой длины, потребуется оружие противника, чтобы преодолеть защиту Сатору Годжо? Ответ укажите в метрах, при необходимости округлив до сотых.

Решение:

Если противник проходит расстояние 1 м, оставшееся расстояние окажется равным $4 / 5$ м. После преодоления этого расстояния Сатору окажется на расстоянии $(4 / 5) * (4 / 5)$ м, и так далее. Суммарное расстояние, которое потребуется преодолеть:

$$1 + 1 * \frac{4}{5} + 1 * (\frac{4}{5})^2 + 1 * (\frac{4}{5})^3 + \dots$$

- сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии. Найдем эту сумму по формуле:

$$S = \frac{b_1}{1 - q}$$

где b_1 - первый член прогрессии, q - знаменатель прогрессии.

$$S = 1 / (1 - (4 / 5)) = 5$$

Ответ: 5

Задача 4.2+

В аниме и манге "Магическая битва" сильнейший маг современности Сатору Годжо пользуется защитной техникой бесконечности. Автор не объясняет явным образом принципа работы техники, но утверждает, что она работает по принципу "Ахиллеса и черепахи". Предположим, что техника работает на расстоянии 1 метр перед пользователем. При приближении к пользователю на x (в пределах этого расстояния) расстояние, оставшееся до пользователя, увеличивается на $(5 / 6) x$. Какой длины,

потребуется оружие противника, чтобы преодолеть защиту Сатору Годжо? Ответ укажите в метрах, при необходимости округлив до сотых.

Решение:

Если противник проходит расстояние 1 м, оставшееся расстояние окажется равным $5/6$ м. После преодоления этого расстояния Сатору окажется на расстоянии $(5/6) * (5/6)$ м, и так далее. Суммарное расстояние, которое потребуется преодолеть:

$$1 + 1 * \frac{5}{6} + 1 * \left(\frac{5}{6}\right)^2 + 1 * \left(\frac{5}{6}\right)^3 + \dots$$

- сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии. Найдем эту сумму по формуле:

$$S = \frac{b_1}{1 - q}$$

где b_1 - первый член прогрессии, q - знаменатель прогрессии.

$$S = 1 / (1 - (5 / 6)) = 6$$

Ответ: 6

Задача 4.3

Эффективный менеджер Артем узнал, что по-настоящему эффективный менеджер должен уметь делегировать рабочие задачи. Артем вдохновился таким подходом и для начала решил проанализировать все свои задачи. В результате анализа Артем выяснил следующее:

- Задач у Артема было бесконечно много.
- Если отсортировать задачи Артема в порядке уменьшения времени, которое нужно затратить на их выполнение, то окажется, что каждая следующая задача требует 90% времени от предыдущей задачи.
- Самая трудоемкая из задач Артема требует 5 часов времени.
- Чтобы делегировать любую задачу, Артем должен для начала найти исполнителя, который может ее выполнить, а затем объяснить ему суть задачи. На основе своего опыта Артем оценил, что делегирование одной задачи займет у него 1 час времени. То есть вместо того, чтобы делать задачу трудоёмкостью N часов самому, он может потратить 1 час времени, чтобы передать её другому исполнителю, после чего ещё N часов исполнитель будет её делать, а Артем сможет заняться другими делами.

Какое максимальное количество задач может делегировать Артём так, чтобы в итоге всё бесконечное количество задач было выполнено раньше, чем если бы он делал всё сам?

Решение:

Пусть $A(i)$ - количество часов, которое потребуется на решение i -ой задачи. Если задачи отсортированы по времени выполнения, то

$$A(i + 1) = 0,9 * A(i),$$

и последовательность времен выполнения задач - бесконечно убывающая геометрическая прогрессия.

“Самая трудоемкая из задач Артема требует 5 часов времени.” – значит, $A(1) = 5$.

Если Артём делает все задачи сам, то общее необходимое количество времени - сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии.

Формула для суммы такой прогрессии:

$$S = \frac{b_1}{1 - q}$$

где b_1 - первый член прогрессии, q - знаменатель прогрессии. В нашем случае

$$b_1 = A(1) = 5,$$

$$q = 0,9,$$

$$S = 5 / (1 - 0,9) = 50.$$

С другой стороны, за эти 50 часов Артем может делегировать 50 задач. Но если он делегирует 50, останется ещё бесконечно много никем не сделанных. А вот если делегировать 49, оставшиеся задачи займут суммарно меньше часа.

$$S' = \frac{b_{50}}{1 - q} = \frac{b_1 * q^{49}}{1 - q} = \frac{5 * 0,9^{49}}{0,1} \approx 0,286 \text{ часа}$$

$49 + 0.286 < 50$, т.е. требуемое соотношение выполнено.

Значит, максимально можно делегировать 49 задач.

Ответ: 49.

Задача 4.3+

Эффективный менеджер Артем узнал, что по-настоящему эффективный менеджер должен уметь делегировать рабочие задачи. Артем вдохновился таким подходом и для начала решил проанализировать все свои задачи. В результате анализа Артем выяснил следующее:

- Задач у Артема было бесконечно много.
- Если отсортировать задачи Артема в порядке уменьшения времени, которое нужно затратить на их выполнение, то окажется, что каждая следующая задача требует 90% времени от предыдущей задачи.
- Самая трудоемкая из задач Артема требует 4 часа времени.
- Чтобы делегировать любую задачу, Артем должен для начала найти исполнителя, который может ее выполнить, а затем объяснить ему суть задачи. На основе своего опыта Артем оценил, что делегирование одной задачи займет у него 1 час времени. То есть вместо того, чтобы делать задачу трудоёмкостью N часов самому, он может потратить 1 час времени, чтобы передать её другому исполнителю, после чего ещё N часов исполнитель будет её делать, а Артем сможет заняться другими делами.

Какое максимальное количество задач может делегировать Артём так, чтобы в итоге всё бесконечное количество задач было выполнено раньше, чем если бы он делал всё сам?

Решение:

Пусть $A(i)$ - количество часов, которое потребуется на решение i -ой задачи. Если задачи отсортированы по времени выполнения, то

$$A(i + 1) = 0,9 * A(i),$$

и последовательность времен выполнения задач - бесконечно убывающая геометрическая прогрессия.

“Самая трудоемкая из задач Артема требует 4 часа времени.” – значит, $A(1) = 4$.

Если Артём делает все задачи сам, то общее необходимое количество времени - сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии.

Формула для суммы такой прогрессии:

$$S = \frac{b_1}{1 - q}$$

где b_1 - первый член прогрессии, q - знаменатель прогрессии. В нашем случае

$$b_1 = A(1) = 4,$$

$$q = 0,9,$$

$$S = 4 / (1 - 0,9) = 40.$$

С другой стороны, за эти 40 часов Артем может делегировать 40 задач. Но если он делегирует 40, останется ещё бесконечно много никем не сделанных. А вот если делегировать 39, оставшиеся задачи займут суммарно меньше часа.

$$S' = \frac{b_{40}}{1 - q} = \frac{b_1 * q^{39}}{1 - q} = \frac{4 * 0,9^{39}}{0,1} \approx 0,657 \text{ часа}$$

$39 + 0.657 < 40$, т.е. требуемое соотношение выполнено.

Значит, максимально можно делегировать 39 задач.

Ответ: 39.

Задача 4.4

Антон считает, что раскрыл секрет бесконечных денег. Банк Антона обещает кэшбек в 20% от суммы, потраченной за месяц в его любимом кафе. План Антона не очень сложный — он решил положить на карточку 10000 рублей и каждый месяц тратить на кафе все деньги на карте. В следующем месяце Антон тратит весь кэшбек, начисленный за предыдущий месяц. На какую сумму может закупиться Антон за все время, если будет проворачивать свой план бесконечно долго? Ответ укажите в рублях, при необходимости округлив до целого.

Решение:

В первый месяц Антон тратит $b_1 = 10000$ рублей. В следующем месяце на карту придет кэшбек в размере $b_2 = 0,2 * b_1 = 2000$ рублей. Если потратить все деньги, то в следующем месяце на карту придет кэшбек $b_3 = 0,2 * b_2 = 400$ рублей. Траты за каждый месяц составляют бесконечно убывающую геометрическую прогрессию. Сумму такой прогрессии можно найти по формуле:

$$S = \frac{b_1}{1 - q}$$

где b_1 - первый член прогрессии, q - знаменатель прогрессии.

Тогда сумма за бесконечно большое число операций достигнет значения:

$S = 10000 / (1 - 0,2) = 12500$. Поскольку начиная с некоторого момента члены прогрессии становятся меньше одной копейки (что уже не может корректно зачисляться), ответ 12499 также засчитывается как правильный.

Ответ: 12500 или 12499.

Задача 4.4+

Антон считает, что раскрыл секрет бесконечных денег. Банк Антона обещает кэшбек в 20% от суммы, потраченной за месяц в его любимом кафе. План Антона не очень сложный — он решил положить на карточку 20000 рублей и каждый месяц тратить на кафе все деньги на карте. В следующем месяце Антон тратит весь кэшбек, начисленный за предыдущий месяц. На какую сумму может закупиться Антон за все время, если будет проворачивать свой план бесконечно долго? Ответ укажите в рублях, при необходимости округлив до целого.

Решение:

В первый месяц Антон тратит $b_1 = 20000$ рублей. В следующем месяце на карту придет кэшбек в размере $b_2 = 0,2 * b_1 = 4000$ рублей. Если потратить все деньги, то в следующем месяце на карту придет кэшбек $b_3 = 0,2 * b_2 = 800$ рублей. Траты за каждый месяц составляют бесконечно убывающую геометрическую прогрессию. Сумму такой прогрессии можно найти по формуле:

$$S = \frac{b_1}{1 - q}$$

где b_1 - первый член прогрессии, q - знаменатель прогрессии.

Тогда сумма за бесконечно большое число операций достигнет значения:

$S = 20000 / (1 - 0,2) = 25000$. Поскольку начиная с некоторого момента члены прогрессии становятся меньше одной копейки (что уже не может корректно зачисляться), ответ 24999 также засчитывается как правильный.

Ответ: 25000 или 24999.

Блок задач №5

Задача 5.1

В романе «Дюна» основным и наиболее ценным ресурсом являются специи (меланж). Главная ценность меланжа заключается в его способности наделять навигаторов Космической Гильдии возможностью предвидеть будущее. Это позволяет им находить безопасные маршруты для космических кораблей, перемещающихся между звёздными системами.

Рассмотрим задачу по расчету времени полета с планеты Каладан на планету Аракис. Известно, что в этом полете есть три статьи расходов меланжа:

Фиксированная плата: Навигаторы получают фиксированную плату в размере 2 граммов меланжа за свои услуги, независимо от продолжительности полета. Полученный таким образом меланж не тратится в полете, а остается у навигаторов.

Поиск маршрута: перед началом полета меланж затрачивается на поиск безопасного маршрута между планетами. Количество потраченных на это специй зависит от времени полета по следующему закону: $F = 2/t$ (где t — длительность полета в днях).

Ежедневные расходы: На технические нужды расходуется 0,5 грамма меланжа за каждый день полета.

Определите длительность полета с Каладана на Аракис, требующего минимального расхода специй.

Решение:

Обозначим общее количество потраченных граммов меланжа через x . Тогда:

$$x = \frac{2}{t} + \frac{1}{2}t + 2 = \frac{2}{t} + \frac{1}{2}t + 4 - 2 = \frac{4 + t^2 - 4t}{2t} + 4 = \frac{(t - 2)^2}{2t} + 4$$

Поскольку $t > 0$, а в числителе первого слагаемого стоит квадрат разности, то это слагаемое принимает наименьшее значение 0 при $t = 2$.

Ответ: 2

Задача 5.1+

В романе «Дюна» основным и наиболее ценным ресурсом являются специи (меланж). Главная ценность меланжа заключается в его способности наделять навигаторов Космической Гильдии возможностью предвидеть будущее. Это позволяет им находить безопасные маршруты для космических кораблей, перемещающихся между звёздными системами.

Рассмотрим задачу по расчету времени полета с планеты Каладан на планету Аракис. Известно, что в этом полете есть три статьи расходов меланжа:

Фиксированная плата: Навигаторы получают фиксированную плату в размере 2 граммов меланжа за свои услуги, независимо от продолжительности полета. Полученный таким образом меланж не тратится в полете, а остается у навигаторов.

Поиск маршрута: перед началом полета меланж затрачивается на поиск безопасного маршрута между планетами. Количество потраченных на это специй зависит от времени полета по следующему закону: $F = 2 / t$ (где t — длительность полета в днях).

Ежедневные расходы: На технические нужды расходуется 0,5 грамма меланжа за каждый день полета.

Определите минимально возможную стоимость полёта с Каладана на Аракис в граммах. Округлите до целого.

Решение:

Обозначим общее количество потраченных граммов меланжа через x . Тогда:

$$x = \frac{2}{t} + \frac{1}{2}t + 2 = \frac{2}{t} + \frac{1}{2}t + 4 - 2 = \frac{4 + t^2 - 4t}{2t} + 4 = \frac{(t - 2)^2}{2t} + 4$$

Поскольку $t > 0$, а в числителе первого слагаемого стоит квадрат разности, то это слагаемое принимает наименьшее значение 0 при $t = 2$, а итоговое количество потраченных граммов - 4.

Ответ: 4

Задача 5.2

Условие:

Транспортной компании нужно перевести груз между двумя портами, расстояние между которыми составляет 1000 км. Компания располагает грузовым танкером, скорость которого может составлять от 20 до 26 км/ч (Двигаться с меньшей скоростью по правилам компании можно только вблизи портов, этим можно пренебречь). Стоимость перевозки складывается из фиксированной платы экипажу корабля в размере 2 млн рублей и платы за обслуживание танкера (поддержание работы танкера, затраты на топливо и т.д.). Аналитики компании подсчитали, что в интервале скоростей, допустимых правилами компании, расходы за час описываются формулой

$$N(v) = 60 * v^3 - 1400 * v^2 + 9000 * v \text{ руб./час.}$$

Каковы минимальные расходы на транспортировку груза в этом случае? Ответ укажите в рублях.

Решение:

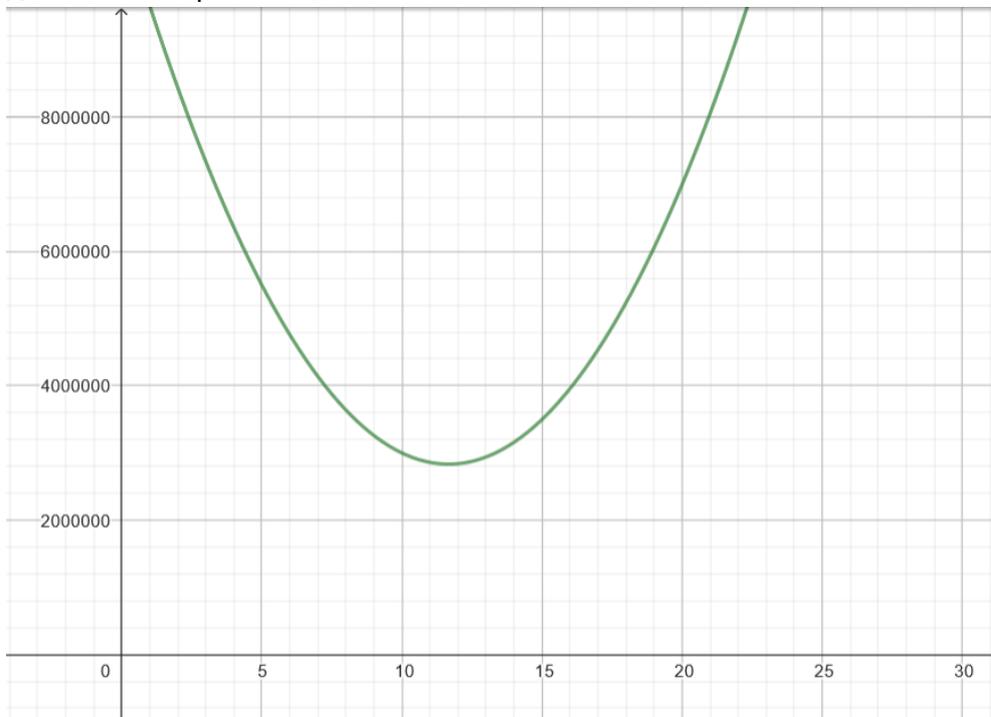
Суммарные расходы складываются из фиксированной платы $N_{\text{фикс}}$ и переменной платы, которая зависит от скорости судна и времени в пути. Суммарные расходы составят:

$$N_{\text{сумм}} = N_{\text{фикс}} + N(v) * t,$$

где $t = S / v$ - время судна в пути. Подставим t и $N(v)$ в формулу и получим:

$$N_{\text{сумм}} = 2000000 + 60000 * v^2 - 1400000 * v + 9000000 \text{ рублей}$$

Построим график $N_{\text{сумм}}(v)$. Видно, что на допустимом интервале скоростей данная функция монотонна и возрастает. Значит, минимум функции в этом интервале будет достигаться при $v = v_{\text{min}} = 20$ км/ч.



Минимальные затраты на транспортировку составят:

$$N_{\text{сумм}}(20) = 7000000.$$

Ответ: 7000000

Задача 5.2+

Условие:

Транспортной компании нужно перевести груз между двумя портами, расстояние между которыми составляет 1000 км. Компания располагает грузовым танкером, скорость которого может составлять от 20 до 26 км/ч (Двигаться с меньшей скоростью по правилам компании можно только вблизи портов, этим можно пренебречь). Стоимость перевозки складывается из фиксированной платы экипажу корабля в размере 1 млн рублей и платы за обслуживание танкера (поддержание работы танкера, затраты на топливо и т.д.). Аналитики компании подсчитали, что в интервале скоростей, допустимых правилами компании, расходы за час описываются формулой $N(v) = 60 * v^3 - 1400 * v^2 + 9000 * v$ руб./час.

Каковы минимальные расходы на транспортировку груза в этом случае? Ответ укажите в рублях.

Решение:

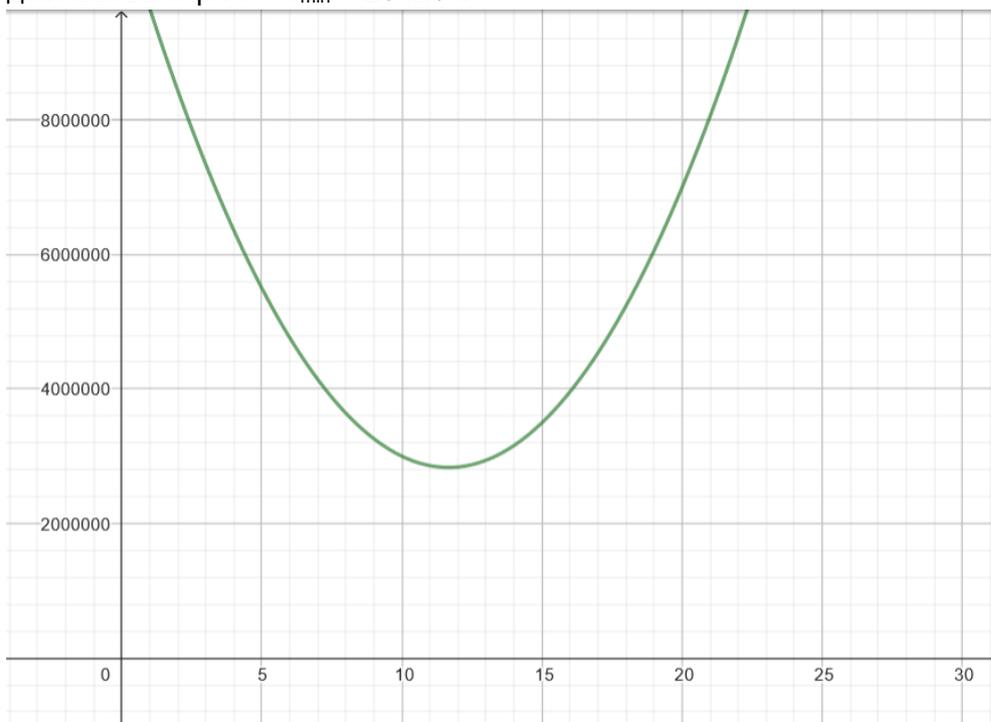
Суммарные расходы складываются из фиксированной платы $N_{\text{фикс}}$ и переменной платы, которая зависит от скорости судна и времени в пути. Суммарные расходы составят:

$$N_{\text{сумм}} = N_{\text{фикс}} + N(v) * t,$$

где $t = S / v$ - время судна в пути. Подставим t и $N(v)$ в формулу и получим:

$$N_{\text{сумм}} = 1000000 + 60000 * v^2 - 1400000 * v + 9000000 \text{ рублей}$$

Построим график $N_{\text{сумм}}(v)$. Видно, что на допустимом интервале скоростей данная функция монотонна и возрастает. Значит, минимум функции в этом интервале будет достигаться при $v = v_{\text{min}} = 20$ км/ч.



Минимальные затраты на транспортировку составят:

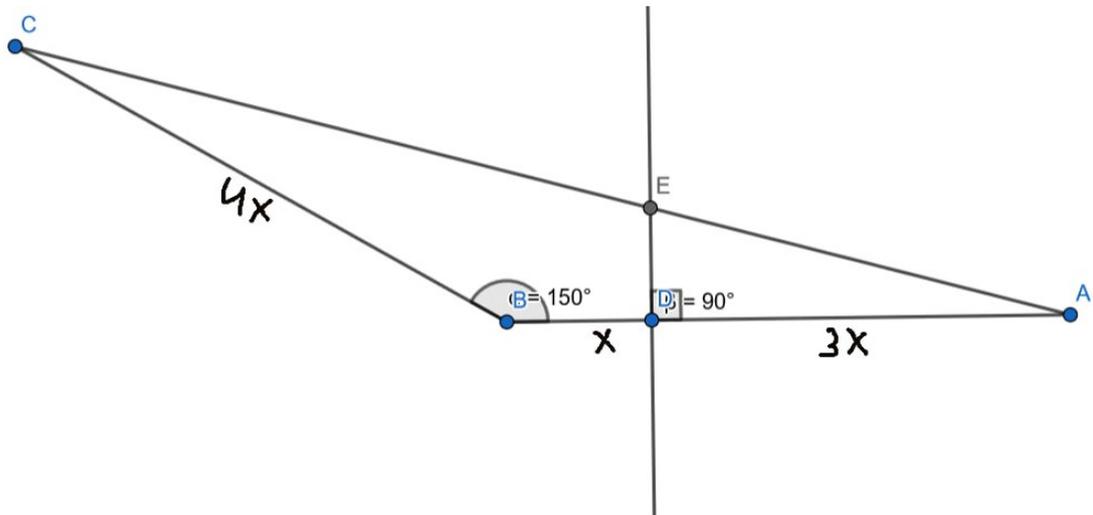
$$N_{\text{сумм}}(20) = 6000000.$$

Ответ: 6000000

Задача 5.3

Условие:

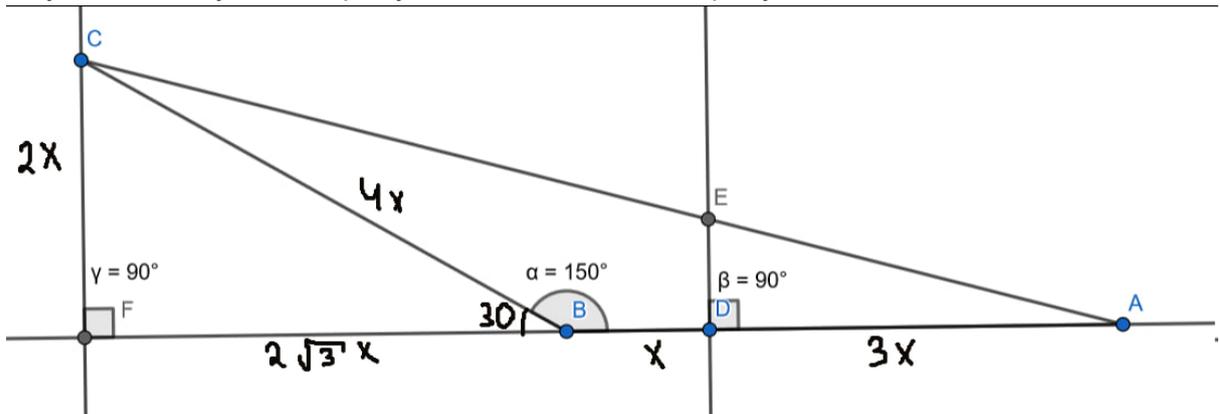
Гоша всю свою жизнь испытывал проблемы с пробуждением. Он пробовал пользоваться различными будильниками – спокойными, громкими, требующими физической активности для отключения звука и т.п. К сожалению, ни один из вариантов его не устроил. Тогда Гоша разработал свое собственное приложение-будильник с задачами, решая которые, должен проснуться даже самый большой ценитель снов. Больше Гоша не просыпает важные мероприятия, вместо этого каждое утро он решает задачи по геометрии под неистовый вой сирены. Помогите Гоше найти ответ на одну из таких задач:



Введите в ответ отношение AE/AC , округлив до сотых.

Решение:

Опустим высоту CF на прямую AB . Угол $FBC = 30$ градусов, тогда $CF = 2x$.



По теореме Пифагора:

$$FB = \sqrt{(4x)^2 - (2x)^2} = 2\sqrt{3}x.$$

$DE \parallel FC$ т.к. $DE \perp AB$ и $FC \perp AB \Rightarrow$

По т. Фалеса:

$$AE / AC = AD / AF = (3 * x) / (x * (4 + 2\sqrt{3})) = 3 / (4 + 2\sqrt{3}) \approx 0.402 \approx 0,4$$

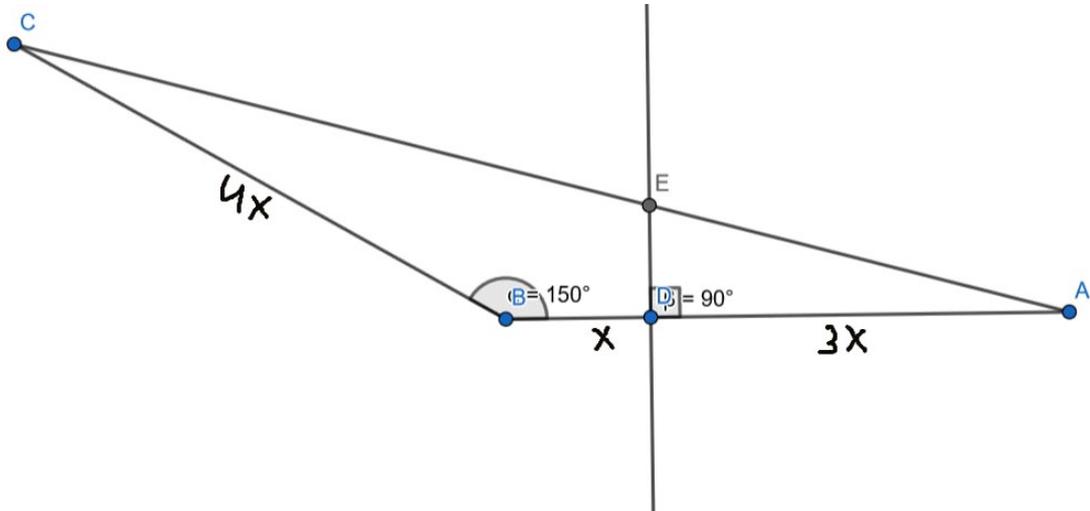
Ответ: 0,4

Задача 5.3+

Условие:

Гоша всю свою жизнь испытывал проблемы с пробуждением. Он пробовал пользоваться различными будильниками – спокойными, громкими, требующими физической активности для отключения звука и т.п. К сожалению, ни один из вариантов его не устроил. Тогда Гоша разработал свое собственное приложение-будильник с задачами, решая которые, должен проснуться даже самый большой ценитель снов. Больше Гоша не просыпает важные

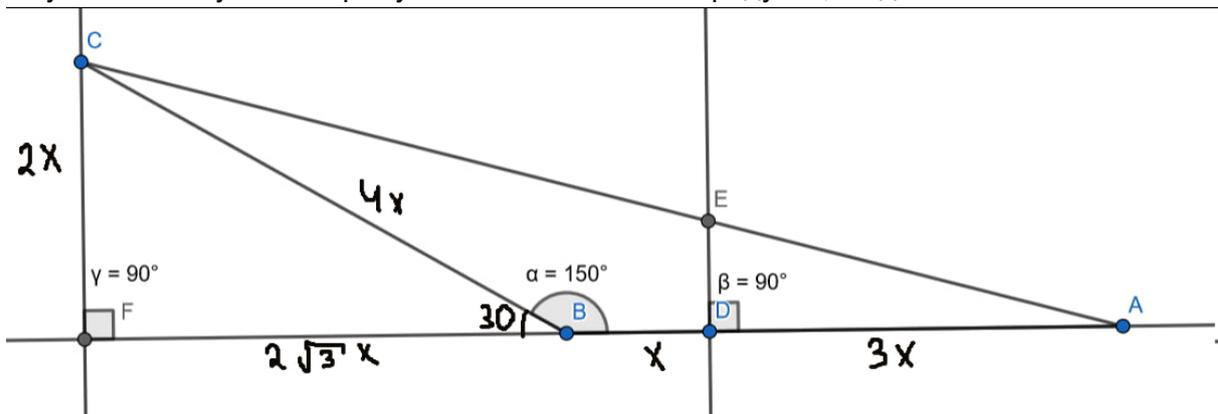
мероприятия, вместо этого каждое утро он решает задачи по геометрии под неистовый вой сирены. Помогите Гоше найти ответ на одну из таких задач:



Введите в ответ отношение AC/AE , округлив до сотых.

Решение:

Опустим высоту CF на прямую AB . Угол $FBC = 30$ градусов, тогда $CF = 2x$.



По теореме Пифагора:

$$FB = \sqrt{(4x)^2 - (2x)^2} = 2\sqrt{3}x.$$

$DE \parallel FC$ т.к. $DE \perp AB$ и $FC \perp AB \Rightarrow$

По т. Фалеса:

$$AC/AE = AF/AD = (x * (4 + 2\sqrt{3})) / (3 * x) = (4 + 2\sqrt{3}) / 3 \approx 2.49$$

Ответ: 2.49

Задача 5.4

Таня очередным утром открыла новости и ужаснулась: для борьбы с инфляцией центральный банк повысил годовую ставку до 20%! «Мне нужно иметь сбережения на чёрный день, но, если они будут просто лежать на карте, с такой инфляцией они обесценятся», - подумала Таня и решила открыть накопительный вклад. Банк предложил

ей следующие варианты: либо вклад с фиксированной ставкой 1.7% с ежемесячным начислением на изначальную сумму, либо с фиксированной ставкой 1.6% и ежемесячным начислением на остаток с учётом процентов (то есть во втором случае проценты каждый месяц ещё начисляются и на доход по вкладу за все предыдущие месяцы). При этом забрать деньги по каждому вкладу можно лишь в конце срока, иначе потеряются все проценты.

Увидев большую ставку, Таня, не раздумывая, положила 40000 рублей на 12 месяцев на вклад под 1.7% и, лишь придя домой, поняла, что ошиблась. А насколько сильно? Найдите, на сколько больше она могла бы заработать, если бы положила деньги на вклад со ставкой 1.6%, но начислением на проценты. Ставки вкладов приведены помесечные. Ответ укажите в рублях, при необходимости округлив до целых.

Решение:

По первому вкладу каждый месяц будет прибавляться 0,017 от положенной в начале суммы, то есть суммарно через 12 месяцев на счёте окажется:

$$S_{12} = 40000 * (1 + 0,017 * 12) = 40000 * 1,204 = 48160 \text{ рублей}$$

Во втором вкладе остаток начисляется в том числе на проценты, поэтому формула иная:

$$P_1 = 40000 + 0,016 * 40000$$

$$P_2 = (40000 + 0,016 * 40000) * (1 + 0,016) = 40000 * (1 + 0,016)^2$$

$$P_{12} = 40000 * 1,016^{12} \approx 40000 * 1,2098 \approx 48393 \text{ рубля}$$

Разница $48393 - 48160 = 233$ рубля.

Ответ: 233.

Задача 5.4+

Таня очередным утром открыла новости и ужаснулась: для борьбы с инфляцией центральный банк повысил годовую ставку до 20%! «Мне нужно иметь сбережения на чёрный день, но, если они будут просто лежать на карте, с такой инфляцией они обесценятся», - подумала Таня и решила открыть накопительный вклад. Банк предложил ей следующие варианты: либо вклад с фиксированной ставкой 1.7% с ежемесячным начислением на изначальную сумму, либо с фиксированной ставкой 1.6% и ежемесячным начислением на остаток с учётом процентов (то есть во втором случае проценты каждый месяц ещё начисляются и на доход по вкладу за все предыдущие месяцы). При этом забрать деньги по каждому вкладу можно лишь в конце срока, иначе потеряются все проценты.

Увидев большую ставку, Таня, не раздумывая, положила 50000 рублей на 12 месяцев на вклад под 1.7% и, лишь придя домой, поняла, что ошиблась. А насколько сильно? Найдите, на сколько больше она могла бы заработать, если бы положила деньги на вклад со ставкой 1.6%, но начислением на проценты. Ставки вкладов приведены помесечные. Ответ укажите в рублях, при необходимости округлив до целых.

Решение:

По первому вкладу каждый месяц будет прибавляться 0,017 от положенной в начале суммы, то есть суммарно через 12 месяцев на счёте окажется:

$$S_{12} = 50000 * (1 + 0,017 * 12) = 50000 * 1,204 = 60200 \text{ рублей}$$

Во втором вкладе остаток начисляется в том числе на проценты, поэтому формула иная:

$$P_1 = 50000 + 0,016 * 50000$$

$$P_2 = (50000 + 0,016 * 50000) * (1 + 0,016) = 50000 * (1 + 0,016)^2$$

$$P_{12} = 50000 * 1,016^{12} \approx 50000 * 1,2098 = 60490 \text{ рублей}$$

Разница $60490 - 60200 = 290$ рублей.

Ответ: от 290 до 292.